NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Théorème sur l'intersection d'un cercle et d'une conique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 66-68

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__66_1>

THÉORÈME SUR L'INTERSECTION D'UN CERCLE ET D'UNE CONIQUE.

Théorème. *Par un point* fixe *dans le plan d'une conique, on fait passer une corde* quelconque ; *sur cette corde comme diamètre, on décrit une circonférence qui coupera la conique en deux points ; la corde qui joint ces deux points passe aussi par un point fixe.*

Démonstration. Plaçons l'origine des coordonnées au point fixe, et prenons pour axes des parallèles aux deux axes principaux.

Soient

$$Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

équation de la conique ;

$$(y - px)(y + px + r) = y^2 - p^2x^2 + ry - prx = 0,$$

équation de deux droites *conjointes*, c'est-à-dire de deux droites parallèles à des diamètres *égaux*, système qui coupe la conique en quatre points situés sur une même circonférence ; soit

$$y^2(A+\lambda)+x^2(C-\lambda p^2)+y(D+\lambda r)+x(E-\lambda pr)+F=0,$$

l'équation d'une conique passant par les quatre points d'intersection ; λ est un multiplicateur arbitraire. Pour que cette équation représente un cercle, on doit avoir

$$A+\lambda=C-\lambda p^2,\quad \lambda=\frac{C-A}{1+p^2}.$$

Soient x', y' les coordonnées du centre de ce cercle ; on a

$$x'=-\frac{E-\lambda pr}{2(A+\lambda)},\quad y'=-\frac{D+\lambda r}{2(A+\lambda)};$$

ce centre, d'après l'énoncé, est sur la droite $y-px=0$, donc

$$-(D+\lambda r)+p(E-\lambda pr)=0,$$

$$r=\frac{pE-D}{\lambda(p^2+1)}-\frac{pE-D}{C-A}.$$

Substituant cette valeur de r dans l'équation du second ordre, on obtient

$$y(C-A)+px(C-A)+pE-D=0,$$

ou

$$y+p\left(x+\frac{E}{C-A}\right)=\frac{D}{C-A}.$$

Cette droite passe donc par le point fixe qui a pour coordonnées

$$x=-\frac{E}{C-A},\quad y=\frac{D}{C-A}.$$

C. Q. F. D.

Remarque. Cette propriété nous a été communiquée sans démonstration par M. Siacchi, de Milan, et pour le cas seulement où le point fixe est situé sur l'axe focal de l'ellipse.

Corollaire. Les deux systèmes de cercles sont des faisceaux homographiques.

$$y - px = 0, \quad y(C - A) + px(C - A) + pE - D = 0,$$

sont deux rayons homographiques; éliminant p, on obtient

$$2xy(C - A) + Ey - Dx = 0,$$

équation d'une hyperbole équilatère.

Remarque. Lorsque le point fixe est à l'infini, les deux faisceaux sont chacun formés de rayons parallèles; ce qui est intuitif.