

V.-A. LE BESGUE

Généralisation d'un théorème de M. M. Roberts

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 63-66

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__63_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GENERALISATION D'UN THÉORÈME DE M. M. ROBERTS;

PAR M. V.-A. LE BESGUE.

THÉORÈME. *Soit ABCD un tétraèdre dont les aires des faces respectivement opposées aux sommets A, B, C, D sont respectivement a, b, c, d. Si sur un plan quelconque P on abaisse des points A, B, C, D les perpendiculaires a', b', c', d', positives ou négatives selon qu'elles sont d'un côté du plan ou de l'autre, on aura toujours*

$$W = aa' + bb' + cc' + dd' = 3V \cdot \frac{\rho}{r},$$

en représentant par V le volume du tétraèdre, par r le rayon de la sphère inscrite, et par ρ la distance du plan P au centre de la sphère.

Quand le théorème a été prouvé pour $\rho = 0$, c'est-à-dire quand on a montré que la somme $aa' + bb' + cc' + dd'$ est nulle relativement à tous les plans passant par le centre de la sphère inscrite, on trouve tout de suite pour un plan à la distance ρ de ce centre

$$\begin{aligned} & a(a' + \rho) + b(b' + \rho) + c(c' + \rho) + d(d' + \rho) \\ &= (a + b + c + d)\rho = 3V \cdot \frac{\rho}{r}, \end{aligned}$$

à cause de

$$3V = (a + b + c + d)r.$$

Pour démontrer le cas de $\rho = 0$, on représentera par a'', b'', c'' les trois arêtes passant par D , de sorte que l'aire a soit comprise entre b'' et c'' . Si la perpendiculaire menée par D à la face a fait avec a'' l'angle α_1 , on a

$$3V = aa'' \cos \alpha_1,$$

et de même

$$3V = bb'' \cos \beta_1, \quad 3V = cc'' \cos \gamma_1.$$

Maintenant si l'on prend les arêtes a'', b'', c'' pour axes des coordonnées, et que

$$h = \cos \alpha \cdot x + \cos \beta \cdot y + \cos \gamma \cdot z,$$

soit l'équation du plan P , en représentant par h la perpendiculaire abaissée de l'origine D sur ce plan, et par α, β, γ les angles que cette perpendiculaire fait avec les trois axes, il en résulte que pour avoir les trois autres perpendiculaires abaissées sur le plan P des points A, B, C , il suffit de mener par ces points des plans parallèles à P .

En supposant ces trois perpendiculaires d'un même côté du plan, la perpendiculaire h étant de l'autre côté, les trois perpendiculaires de même signe sont

$$a'' \cos \alpha - h, \quad b'' \cos \beta - h, \quad c'' \cos \gamma - h,$$

et faisons

$$W = (a'' \cos \alpha - h) a + (b'' \cos \beta - h) b \\ + (c'' \cos \gamma - h) c - dh,$$

ou

$$W = aa'' \cos \alpha_1 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_1} + bb'' \cos \beta_1 \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \beta_1} \\ + cc'' \cos \gamma_1 \cdot \frac{\cos \gamma}{\cos \gamma_1} - (a + b + c + d) r \cdot \frac{h}{r},$$

ou encore

$$W = 3V \left\{ \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_1} + \frac{\cos \beta}{\cos \beta_1} + \frac{\cos \gamma}{\cos \gamma_1} - \frac{h}{r} \right\}.$$

Or les coordonnées du centre de la sphère sont respectivement

$$\frac{r}{\cos \alpha_1}, \quad \frac{r}{\cos \beta_1}, \quad \frac{r}{\cos \gamma_1}.$$

Si ce point est sur le plan

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - h = 0,$$

on a donc

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_1} + \frac{\cos \beta}{\cos \beta_1} + \frac{\cos \gamma}{\cos \gamma_1} - \frac{h}{r} = 0, \quad \text{d'où} \quad W = 0.$$

La démonstration ne change pas pour le triangle; seulement a, b, c , représentant les côtés, et la surface étant S , on obtient

$$aa'' + bb'' + cc'' = 2S \cdot \frac{p}{r},$$

pour $\rho = 0$ on a

$$aa'' + bb'' + cc'' = 0,$$

pour $\rho = r$ on a

$$aa'' + bb'' + cc'' = 2S,$$

c'est là le théorème de M. Michael Roberts ; alors la droite variable dans le plan du triangle est toujours tangente au cercle inscrit dans ce triangle.