

DELLAC

Solution de la question 571

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 375-376

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__375_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 571

(voir p 112),

PAR M. DELLAC.

Il faut trouver

$$z = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^p + y^p}{p^2}$$

sachant que

$$x + y = 1.$$

Cette dernière relation donne

$$\frac{dy}{dx} = -1,$$

donc

$$\frac{dz}{dx} \Rightarrow \sum \frac{x^{p-1} - y^{p-1}}{p} = \frac{1}{x} \sum \frac{x^p}{p} - \frac{1}{y} \sum \frac{y^p}{p}$$

ou bien

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \log(1-x) - \frac{1}{y} \log(1-y),$$

ou bien encore

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \log y - \frac{1}{y} \log x,$$

Le second membre est une différentielle exacte, celle de $-\log x \cdot \log y$: intégrant de part et d'autre, il vient

$$z = C - \log x \log y.$$

Pour $x = 1$ et par suite $y = 0$, le premier membre devient

$$\sum \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{resultat connu}),$$

tandis que la seconde se réduit à C , car $\log x \cdot \log (1 - x)$ devient nul pour $x = 1$: donc

$$C = \frac{\pi^2}{6},$$

et l'on a

$$z = \frac{\pi^2}{6} - \log x \cdot \log y.$$

C. Q. F. D.