

C. KESSLER

Solution de la question 570

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 289-291

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__289_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 570

(voir p. 111);

PAR M. C. KESSLER,
Elève du lycée Saint-Louis.

Deux ellipses homofocales sont l'une inscrite à un triangle et l'autre circonscrite au même triangle; on a la relation suivante entre les demi grands axes et l'excentricité

$$\alpha^8 - 4\alpha^6 a^2 + 6\alpha^4 a^2 c^2 - 4\alpha^2 a^2 c^4 + a^4 c^4 = 0.$$

(MENTION.)

Cette relation ne me semble pas exacte.

On sait que lorsque deux coniques jouissent de la propriété qu'un triangle inscrit à l'une est en même temps circonscrit à l'autre, il existe une infinité d'autres trian-

gles inscrits à la première conique et circonscrits à la seconde, proposition qui du reste s'applique à tout polygone (Poncelet).

Si donc je cherche la condition pour que les coniques soient telles, qu'un triangle inscrit ABC à l'une ayant un de ses sommets à l'extrémité A du grand axe $2a$ de l'ellipse extérieur, soit en même temps circonscrit à l'autre conique, j'exprimerai évidemment en même temps que les deux coniques jouissent de la même propriété pour une infinité d'autres triangles.

Si M ($x' y'$), point de l'ellipse intérieure de grand axe $2a$, est le point de contact de la tangente AB, le coefficient angulaire de cette droite est $-\frac{(\alpha^2 - c^2) x'}{\alpha^2 y'}$. Or

$$x' = \frac{\alpha^2}{a},$$

$$y' = \frac{1}{\alpha} \sqrt{(\alpha^2 - c^2) \left(\alpha^2 - \frac{\alpha^4}{a^2} \right)} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{(\alpha^2 - c^2)(a^2 - \alpha^2)}.$$

Du reste

$$AQ = (a + \alpha), \quad BQ = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \sqrt{a^2 - \alpha^2};$$

Q est le point de contact du côté BC du triangle avec l'ellipse intérieure.

Le triangle rectangle ABQ qui donne

$$\overline{BQ}^2 = \overline{AQ}^2 \tan^2 \angle BAQ,$$

fournira donc la relation

$$\frac{(a^2 - c^2)}{a^2} (a^2 - \alpha^2) \pm (a + \alpha)^2 \frac{(\alpha^2 - c^2) \frac{\alpha^4}{a^2}}{\frac{\alpha^4}{a^2} (a^2 - c^2)(a^2 - \alpha^2)},$$

$$\frac{(a^2 - c^2)(a^2 - \alpha^2)}{a^2} = \frac{(a + \alpha)^2(a^2 - c^2)}{(a^2 - \alpha^2)},$$

$$(a^2 - c^2)(a - \alpha)^2 = \alpha^2(a^2 - c^2),$$

relation du second degré essentiellement différente de celle qui est proposée; elle s'écrit encore

$$\alpha^2 c^2 + 2 a \alpha (a^2 - c^2) - a^4 = 0.$$