

CATALAN

**Sur la sommation de certains coefficients
binomiaux (voir t. XIX, p. 32)**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 260-263

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20_260_2

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA SOMMATION DE CERTAINS COEFFICIENTS BINOMIAUX

(voir t. XIX, p. 32) ;

PAR M. CATALAN (*).

I. PROBLÈME. *Dans le développement de $(1 + z)^m$, on prend les termes de p en p . Quelle est la somme de*

(*) Né à Bruges (Belgique) le 30 mai 1814.

leurs coefficients? (L'exposant m est supposé entier positif) (*).

Représentons par $S_0, S_1, \dots, S_{p-1}$ les sommes dont les premiers termes sont $1, \frac{m}{1}, \dots, \frac{m(m-1) \dots (m-p+2)}{1.2 \dots (p-1)}$.

Soit θ une racine *primitive* de l'équation

$$(I) \quad \theta^p - 1 = 0.$$

En remplaçant z , successivement, par $\theta, \theta^2, \dots, \theta^p$, nous aurons, en vertu de cette équation,

[illegible]

II. Pour tirer, des équations (2), la valeur de S_k , il suffit de les ajouter membre à membre, après avoir multiplié par θ^{-k} les deux membres de la première, par θ^{-2k} les deux membres de la deuxième, etc. En effet, le coefficient de S_k , dans l'équation résultante, est

$$\theta^{k'-k} + \theta^2(k'-k) + \dots + \theta^p(k'-k) = 0,$$

attendu que k' et k étant inégaux, et inférieurs à p , $\theta^{k'-k}$ est une racine primitive de l'équation (1).

Par suite,

$$(3) \quad pS_k = (1 + \theta)^m \theta^{-k} + (1 + \theta^2) \theta^{-2k} + \dots + (1 + \theta^p)^m \theta^{-pk}.$$

(*) Un jeune géomètre, M. Haton de la Goupillière, a résolu la même question pour le cas d'une fonction quelconque. Néanmoins, à cause de la simplicité du résultat exprimé par la formule (C), j'ai cru pouvoir le faire connaître.

III. Soit maintenant

$$(4) \quad \theta = \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi;$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \theta = 2 \cos \frac{1}{2} \varphi \cdot e^{\frac{1}{2} \varphi \sqrt{-1}}, \\ 1 + \theta^2 = 2 \cos \frac{2}{2} \varphi \cdot e^{\frac{2}{2} \varphi \sqrt{-1}}, \\ \dots\dots\dots \\ 1 + \theta^p = 2 \cos \frac{p}{2} \varphi \cdot e^{\frac{p}{2} \varphi \sqrt{-1}}. \end{array} \right.$$

La formule (3) devient

$$p S_k = 2^m \left\{ \begin{array}{l} \cos^m \frac{1}{2} \varphi \cdot e^{\left(\frac{m}{2} - k\right) \varphi \sqrt{-1}} + \cos^m \frac{2}{2} \varphi \cdot e^{2 \left(\frac{m}{2} - k\right) \varphi \sqrt{-1}} + \dots \\ \dots\dots\dots \\ + \cos^m \frac{p}{2} \varphi \cdot e^{p \left(\frac{m}{2} - k\right) \varphi \sqrt{-1}} \end{array} \right\}.$$

Par conséquent

$$(A) \quad p S_k = 2^m \left\{ \begin{array}{l} \cos^m \frac{1}{2} \varphi \cos \left(\frac{m}{2} - k\right) \varphi + \cos^m \frac{2}{2} \varphi \cos 2 \left(\frac{m}{2} - k\right) \varphi + \dots \\ \dots\dots\dots \\ + \cos^m \frac{p}{2} \varphi \cdot \cos p \left(\frac{m}{2} - k\right) \varphi \end{array} \right\},$$

et

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \cos^m \frac{1}{2} \varphi \sin \left(\frac{m}{2} - k\right) \varphi + \cos^m \frac{2}{2} \varphi \sin 2 \left(\frac{m}{2} - k\right) \varphi + \dots \\ \dots\dots\dots \\ + \cos^m \frac{p}{2} \varphi \sin p \left(\frac{m}{2} - k\right) \varphi. \end{array} \right.$$

IV. Très-souvent l'évaluation de la quantité entre parenthèses, dans la formule (A), est plus compliquée que la détermination *directe* de S_k . Mais, par cela même, l'é-

quation (A) peut être regardée comme donnant la somme de cette quantité. Pour plus de simplicité, posons

$$m - 2k = q,$$

et rappelons-nous que

$$\varphi = \frac{2\pi}{p};$$

nous aurons

$$(C) \left\{ \begin{aligned} &\cos^m \frac{\pi}{p} \cos q \frac{\pi}{p} + \cos^m \frac{2\pi}{p} \cos 2q \frac{\pi}{p} + \dots \\ &\quad + \cos^m \frac{p\pi}{p} \cos pq \frac{\pi}{p} = \frac{p}{2^m} S_k. \end{aligned} \right.$$

Par exemple,

$$\cos^7 \frac{\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{3} + \cos^7 \frac{2\pi}{3} \cos \frac{10\pi}{3} + \cos^7 \pi \cos 5\pi = \frac{3}{2^7} (7 + 35 + 1).$$

V. Si $k + p$ surpasse $m + 1$, la somme S_k est composée d'un seul terme, égal à $C_{m,k}$; donc alors

$$(D) \left\{ \begin{aligned} &\cos^m \frac{\pi}{p} \cos q \frac{\pi}{p} + \cos^m \frac{2\pi}{p} \cos 2q \frac{\pi}{p} + \dots + \cos^m \frac{p\pi}{p} \cos pq \frac{\pi}{p} \\ &\quad = \frac{p}{2^m} \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}. \end{aligned} \right.$$

Soient, pour fixer les idées,

$$m = 13, p = 11, k = 3, q = 7:$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\cos^{13} \frac{\pi}{11} \cos \frac{7\pi}{11} + \cos^{13} \frac{2\pi}{11} \cos \frac{14\pi}{11} + \cos^{13} \frac{3\pi}{11} \cos \frac{21\pi}{11} + \dots \\ &\quad + \cos^{13} \pi \cos 7\pi = \frac{11}{2^{13}} \cdot 286. \end{aligned} \right.$$