

PAINVIN

Relations entre les diamètres conjugués d'une surface du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 130-135

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__130_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RELATIONS ENTRE LES DIAMÈTRES CONJUGUÉS D'UNE SURFACE DU SECOND ORDRE ;

PAR M. PAINVIN,

Professeur au lycée de Douai.

1. *Lemme.* Pour que la fonction

$$A_{11} X_1^2 + A_{22} X_2^2 + A_{33} X_3^2 \\ + 2 A_{12} X_1 X_2 + 2 A_{13} X_1 X_3 + 2 A_{23} X_2 X_3$$

se réduise à la somme de *deux carrés*, il faut et il suffit que

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

2. Prenons une surface du second degré rapportée à son centre

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 \\ + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 = h; \end{cases}$$

désignons par S le premier membre de cette équation, et par

$$\alpha_1 = \cos(x_2, ox_3), \quad \alpha_2 = \cos(x_3, ox_1), \quad \alpha_3 = \cos(x_1, ox_2)$$

les angles que font entre eux les axes ox_1, ox_2, ox_3 .

Soit maintenant

$$(2) \quad \begin{cases} b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 + b_{33} y_3^2 \\ + 2 b_{12} y_1 y_2 + 2 b_{13} y_1 y_3 + 2 b_{23} y_2 y_3 = h, \end{cases}$$

la forme que prend l'équation (1) lorsqu'on rapporte la

surface à de nouveaux axes oy_1, oy_2, oy_3 ; désignons par T le premier membre de cette équation, et par

$$\beta_1 = \cos(y_2, oy_3), \quad \beta_2 = \cos(y_3, oy_1), \quad \beta_3 = \cos(y_1, oy_2)$$

les angles que font entre eux les nouveaux axes.

Considérons en outre les deux fonctions

$$M = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha_3 x_1 x_2 + 2\alpha_2 x_1 x_3 + 2\alpha_1 x_2 x_3,$$

$$N = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2\beta_3 y_1 y_2 + 2\beta_2 y_1 y_3 + 2\beta_1 y_2 y_3,$$

qui représentent : la première, la distance d'un point à l'origine dans le système des axes primitifs; la seconde, la distance du même point à la même origine dans le nouveau système d'axes.

Quand on passe du système primitif au système nouveau, la fonction S se change en T et la fonction M en N ; par suite, la fonction $S + \lambda M$ se change en $T + \lambda N$, quelle que soit l'indéterminée λ . Donc, si, pour une certaine valeur de λ , la fonction $S + \lambda M$ devient la somme de deux carrés, pour cette même valeur de λ , la fonction $T + \lambda N$ deviendra aussi la somme de deux carrés. Par conséquent, si l'on exprime que les deux fonctions $S + \lambda M, T + \lambda N$ se réduisent à la somme de deux carrés, les deux équations en λ ainsi obtenues, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} + \lambda \alpha_3 & a_{13} + \lambda \alpha_2 \\ a_{21} + \lambda \alpha_3 & a_{22} + \lambda & a_{23} + \lambda \alpha_1 \\ a_{31} + \lambda \alpha_2 & a_{32} + \lambda \alpha_1 & a_{33} + \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} + \lambda & b_{12} + \lambda \beta_3 & b_{13} + \lambda \beta_2 \\ b_{21} + \lambda \beta_3 & b_{22} + \lambda & b_{23} + \lambda \beta_1 \\ b_{31} + \lambda \beta_2 & b_{32} + \lambda \beta_1 & b_{33} + \lambda \end{vmatrix} = 0$$

devront avoir les mêmes racines en λ , être identiques.

3. Posons

$$\left. \begin{aligned}
 A &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \end{vmatrix} \\
 \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 B &= \frac{d\Delta}{da_{11}} + \frac{d\Delta}{da_{22}} + \frac{d\Delta}{da_{33}} + 2\alpha_1 \frac{d\Delta}{da_{23}} + 2\alpha_2 \frac{d\Delta}{da_{31}} + 2\alpha_3 \frac{d\Delta}{da_{12}}, \\
 C &= a_{11}(1 - \alpha_1^2) + a_{22}(1 - \alpha_2^2) + a_{33}(1 - \alpha_3^2) \\
 &\quad + 2a_{12}(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3) + 2a_{13}(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2) + 2a_{23}(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1);
 \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{C'est le carré du volume du parallé-} \\ \text{pipède construit suivant les trois} \\ \text{axes } ox_1, ox_2, ox_3 \text{ avec des longueurs} \\ \text{égales à l'unité.} \end{array}$$

les quantités A, B, C, Δ sont des quantités connues et constantes qui ne dépendent que des coefficients de l'équation primitive et des angles des anciens axes.

En exprimant que les deux équations ci-dessus ont les mêmes racines, on arrive aux trois relations fondamentales suivantes entre les coefficients de l'équation primitive et ceux de l'équation transformée :

$$\left. \begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & \Theta = \frac{\Delta}{A} \cdot V, \\
 \text{(II)} \quad & \frac{d\Theta}{db_{11}} + \frac{d\Theta}{db_{22}} + \frac{d\Theta}{db_{33}} + 2\beta_1 \frac{d\Theta}{db_{23}} + 2\beta_2 \frac{d\Theta}{db_{41}} \\
 & \quad + 2\beta_3 \frac{d\Theta}{db_{12}} = \frac{B}{A} \cdot V, \\
 \text{(III)} \quad & b_{11}(1 - \beta_1^2) + b_{22}(1 - \beta_2^2) + b_{33}(1 - \beta_3^2) \\
 & \quad + 2b_{12}(\beta_1\beta_2 - \beta_3) + 2b_{13}(\beta_1\beta_3 - \beta_2) \\
 & \quad + 2b_{23}(\beta_2\beta_3 - \beta_1) = \frac{C}{A} \cdot V.
 \end{aligned} \right\}$$

Dans ces relations, je désigne par Θ et V les expressions

suivantes :

$$\Theta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$V = \begin{vmatrix} 1 & \beta_3 & \beta_2 \\ \beta_3 & 1 & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta_1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{C'est le carré du volume du parallé-} \\ \text{pipède construit suivant les axes } o\gamma_1, \\ o\gamma_2, o\gamma_3 \text{ avec des longueurs égales à} \\ \text{l'unité.} \end{array}$$

4. PREMIÈRE APPLICATION. Si les trois nouveaux axes sont trois diamètres conjugués, on devra avoir

$$b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0,$$

et l'équation (2) prendra la forme

$$b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 = h.$$

Or, si l'on désigne par a_1, a_2, a_3 les longueurs des trois diamètres conjugués, on aura

$$(3) \quad \begin{cases} b_{11} = \frac{h}{a_1^2}, \\ b_{22} = \frac{h}{a_2^2}, \\ b_{33} = \frac{h}{a_3^2}. \end{cases}$$

Dans cette hypothèse particulière les relations (I), (II), (III) deviennent

$$(I \text{ bis}) \quad b_{11} b_{22} b_{33} = \frac{\Delta}{A} \cdot V,$$

$$(II \text{ bis}) \quad b_{22} b_{33} + b_{33} b_{11} + b_{11} b_{22} = \frac{B}{A} \cdot V,$$

$$(III \text{ bis}) \quad b_{11} (1 - \beta_1^2) + b_{22} (1 - \beta_2^2) + b_{33} (1 - \beta_3^2) = \frac{C}{A} \cdot V.$$

Or, en introduisant les valeurs (3) et en remarquant que $V a_1^2 a_2^2 a_3^2$ est le carré du volume du parallépipède construit suivant les trois axes oy_1, oy_2, oy_3 , avec des longueurs respectivement égales aux longueurs des demi-diamètres, la relation (I bis) donne

$$V a_1^2 a_2^2 a_3^2 = \frac{A h^3}{\Delta} = \text{constante} = a^2 b^2 c^2,$$

a, b, c désignant les trois demi-axes de la surface.

La relation (II bis) donne

$$a^2 + a_2^2 + a_3^2 = \frac{B}{A} \frac{a_1^2 a_2^2 a_3^2 V}{h^2} = \frac{B h}{\Delta} = a^2 + b^2 + c^2.$$

La relation (III bis) conduit à

$$\begin{aligned} a_2^2 a_3^2 (1 - \beta_1^2) + a_3^2 a_1^2 (1 - \beta_2^2) + a_1^2 a_2^2 (1 - \beta_3^2) \\ = \frac{C}{A h} V a_1^2 a_2^2 a_3^2 = \frac{C h^2}{\Delta} = a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2. \end{aligned}$$

D'où l'on conclut ces trois théorèmes :

1° *Le volume du parallépipède construit sur trois diamètres conjugués quelconques est constant.*

2° *La somme des carrés de trois diamètres conjugués quelconques est constante.*

3° *La somme des carrés des surfaces des trois parallélogrammes construits avec trois diamètres conjugués quelconques est constante.*

5. SECONDE APPLICATION. Si les trois nouveaux axes sont rectangulaires, on a

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

et

$$b_{11} = \frac{h}{a_1^2}, \quad b_{22} = \frac{h}{a_2^2}, \quad b_{33} = \frac{h}{a_3^2}.$$

Une seule des relations ci-dessus, la relation (III), ne dépend que des quantités b_{11} , b_{22} , b_{33} ; elle donne alors

$$b_{11} + b_{22} + b_{33} = \frac{C}{A}$$

ou

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} = \frac{C}{A h},$$

c'est-à-dire *la somme des carrés des inverses de trois diamètres rectangulaires quelconques est constante.*