Nouvelles annales de mathématiques

Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 1-96 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__S1_0>

BULLETIN

DE

BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

LA STÉRÉOTOMIE DES ABEILLES.

Maximus in minimis certe Deus et mihi major
Quam vasto cœli in templo astrorumque caterva.
(POLIGNAC, Anti-Lucret, lib. VII, v. 1353-1354).

Si l'on veut classer les animaux d'après leurs aptitudes industrielles, on devra les ranger dans cet ordre :

1°. Insectes;

2°. Oiseaux;

3°. Quadrupèdes, parmi lesquels on ne peut guère citer que les castors, de la famille des Rongeurs.

Les deux premières classes construisent des demeures et des magasins d'approvisionnement pour leurs progénitures : ce qui exige des connaissances géométriques et mécaniques dont le fabricateur des mondes a doué ces êtres, qui paraissent toutefois privés d'*intelligence et de conscience morale* (*); car leurs qualités en tout genre

(*) C'est cette privation qui a porté Descartes à assimiler les animaux à des machines, mais il ne leur a jamais refusé le sentiment et la volonté qui constituent la vie animale. Même chez l'homme, les idées *innées* viensont stationnaires, nullement fonctions du temps, limitées, et sans ces progrès qui caractérisent l'espèce humaine, progrès qui sont les conséquences de la faculté de parler. Dans la classe des Insectes, genre Hyménoptère, c'est l'espèce mellifère; et dans celle-ci la section des abeilles à miel, *Apis mellifera*, qui a attiré de toute antiquité l'attention. Il est à remarquer pourtant que la Bible mentionne l'industrie de la fourmi (*Prov.* VI, 7), et ne parle nullement de l'industrie de l'abeille, ne la cite que pour figurer une poursuite acharnée (*Deut.* I, *Prov.* CXVIII), et toutefois le miel était un des trois produits principaux, avec l'huile et le lait, de la terre promise. Dans les temps modernes, l'industrie des abeilles a fixé aussi l'attention des géomètres (V. *Nouvelles Annales*, t. XV, p. 178), et récemment un éloquent avocat, savant géomètre, le célèbre lord Brougham, en a fait l'objet d'un Mémoire très-instructif (*Comptes rendus*, t. XLVI, p. 1024; 1858). Un motif intéressé a fait négliger d'autres espèces qui produisent aussi du miel, mais non alimentaire, et dont le travail est cependant aussi et peut-être encore plus admirable que celui de l'abeille domestique. En effet, celle-ci trouve un local tout préparé pour la recevoir, soit une ruche, soit une cavité quelconque; elle fait partie d'une société aussi nombreuse qu'une ville très-peuplée compte d'habitants : de là une république d'ouvriers travaillant pour une présidente et pour une agrégation polyandrique; tandis que dans les autres espèces les ateliers ne consistent qu'en un petit nombre d'indi-

---

nent aussi de Dieu. C'est ce qu'a parfaitement exposé Cufuerel, philosophe hollandais, complétement ignoré, et que je n'hésite pas à placer au premier rang, comme précurseur de la philosophie critique fondée par Kant, la seule qui fasse bien le départ de ce que l'homme peut savoir et de ce qu'il est condamné à éternellement ignorer ici-bas, la seule qui reste sur la terre sans jamais perdre de vue le ciel.

vidus, au plus cent, très-souvent moins, jusqu'à un ouvrier tout seul; et là, avant tout, il faut construire un logement, un *nid* pour y placer la génération à venir.

Il est vrai que l'abeille vulgaire résout un problème difficile de maximis et de minimis; mais les espèces solitaires exécutent des opérations stéréotomiques qui exigent plus d'adresse, plus d'imagination, plus de raffinement dans le choix des matériaux, dans la précision des formes. Lisons ce que dit à ce sujet l'immortel Réaumur, dans la préface du tome VI (1742) de sa délicieuse *Histoire des Insectes*, où l'on reconnaît la main de Dieu, tandis que dans l'histoire de l'homme on reconnaît trop souvent la main du démon (*).

« Les huit derniers Mémoires du volume précédent (V^e^) ont été employés et ont à peine suffi à raconter les merveilles que celles-ci (les mouches à miel) nous offrent, et à en prouver la réalité. Il semble qu'elles ont dû épuiser tout ce que nous pouvions donner d'admiration à des mouches. Y en a-t-il de dignes de leur être comparées? Le nombre des abeilles d'une ruche bien peuplée égale celui des habitants d'une grande ville; toutes y travaillent de concert au bien de leur société; leurs gâteaux sont des ouvrages inimitables à l'œil des hommes qui ignorent jusqu'aux secrets de ramasser et de préparer la matière dont ils sont faits. La plus sublime géométrie n'eût pu déterminer une figure plus avantageuse à tous égards pour les cellules dont elles composent leurs gâteaux, que celles dont elles ont fait choix.

» L'air de grandeur qu'ont pour ainsi dire les établis-

(*) Pourquoi la Rochelle, à l'instar d'autres villes, n'élève-t-elle pas une statue au grand homme qui l'a illustrée? Quelle Société, consacrée à l'étude de la nature, ne souscrirait pas à un tel monument? Lisez le jugement que porte Cuvier sur Réaumur (*Biographie* Michaud).

sements des mouches à miel, l'ordre qui y règne, les ouvrages qui s'y exécutent, et l'utilité dont ils nous sont, ne doivent pourtant pas nous éblouir au point de nous ôter le désir de savoir comment se conduisent d'autres mouches dont les sociétés sont peu nombreuses, et ce que font dans le cours de leur vie d'autres mouches du même genre, dont le goût est de vivre solitaires. On admire avec raison ces grandes manufactures dont les ateliers sont remplis d'ouvriers qui s'entr'aident, où les uns ne sont destinés qu'à ébaucher l'ouvrage, les autres l'avancent encore plus, les autres le perfectionnent, et les autres le finissent; on pense avec plaisir ce qu'il y a à gagner en faisant passer successivement la même pièce par différentes mains; mais quand on est au fait des différentes pratiques de nos arts, on n'en estime pas moins un ouvrage pour avoir été commencé et fini dans une boutique obscure par un seul ouvrier, et où l'on fait plus de cas de celui qui seul y a mis la main. C'est ainsi que le vrai connaisseur des ouvrages de la nature, que le bon observateur saura encore admirer les abeilles solitaires dans leur travail, malgré le plaisir qu'il a eu cent et cent fois à voir tant de milliers de mouches occupées en même temps à différents ouvrages dans la même ruche. Enfin ces ruches si peuplées sont de grandes villes; mais on peut être curieux de connaître les mœurs simples des villageois et même des sauvages, après avoir étudié les mœurs des habitants des plus grandes villes et des plus policées. »

Nous choisirons pour exemple le problème de stéréotomie résolu par l'abeille *empileuse*, *Apis centucularis* (Réaumur, t. VI, p. 97 et suivantes) : C'est une femelle solitaire, fécondée, qui est obligée de construire sa demeure et d'engendrer sa société. A cet effet, elle choisit un terrain ni trop dur ni trop friable, et y creuse un cylindre parfaitement calibré de 13 à 14 millimètres de diamètre, sur 26 à 27 centimètres de longueur, et le plus fréquemment l'axe est horizontal; elle enlève la terre par mottes extrêmement petites, mais avec une telle activité, que le cylindre est terminé au bout de quelques heures. Le déblai est déposé près de l'entrée; nous verrons à quel dessein. Il s'agit maintenant de *tapisser* le cylindre; à cet effet, l'abeille se dirige vers un rosier, vole longtemps autour, et quand son choix est fixé, elle se pose sur le bord d'une feuille, trois jambes dessous et trois jambes dessus, et la tête tournée vers le pédoncule. Supposons qu'on ait tracé avec de la craie, sur la demi-feuille, une portion d'ellipse, convexe vers la nervure médiane; si avec des ciseaux on découpe la feuille en suivant cette trace, on obtient un morceau borné par l'ellipse découpée et par le bord dentelé de la feuille qui est aussi sensiblement elliptique. C'est cette opération qu'exécute notre ouvrière; ses dents lui servent de ciseaux, et l'image qu'elle doit avoir dans la tête, lui sert de *trait* et la dirige, et tout est découpé avec plus de précision et en moins de temps que nous ne ferions avec nos instruments (*). A mesure qu'une partie est coupée, elle la plie avec les deux jambes du milieu de son corps; de sorte qu'elle finit par tenir entre ces jambes un morceau triangulaire formé par un quart d'ellipse découpée et par un quart d'ellipse dentelée du bord de la feuille, et par la droite de la plicature. Alors le morceau prend par son poids une position verticale; elle s'envole, le porte dans le creux cylindrique, le déplie et l'applique contre les parois; la partie pointue formée par la rencontre des deux ellipses est pliée pour recouvrir le fond du cylindre; elle recom-

(*) Descartes construit les courbes au moyen d'un système de *règles* liées d'une certaine manière. La trisection du corps de l'insecte paraît servir au même usage.

mence le même manége jusqu'à ce que le cylindre soit entièrement tapissé; mais ce n'est là qu'une besogne préparatoire. Cette enveloppe doit servir de moule à former les cellules, qui sont le but essentiel.

Prenons trois trapèzes égaux et appliquons chaque trapèze contre la même concavité cylindrique; ces trois figures se changeront en trois surfaces cylindriques, terminées chacune par deux droites et par deux arcs de cercles inégaux; réunissons ces trois surfaces, de telle sorte que le bord rectiligne de la première passe sous la seconde surface, le bord de la seconde sous la troisième, et le bord de la troisième sous la première; nous obtiendrons ainsi une sorte de cône tronqué ouvert par les deux bouts, et si l'on plie le petit bout en forme de voûte, on aura une espèce de dé à coudre. Telle est la forme d'une cellule. L'abeille découpe successivement trois morceaux dans des feuilles de rosier, comme elle a fait pour l'*enveloppe*, mais les ellipses sont de moindre dimension; le grand axe a 4 millimètres et le petit 2 millimètres environ; les trois morceaux sont égaux; mais elle ne les déplie plus, et leur laisse la forme triangulaire et en construit une cellule en forme de dé, comme il a été dit; et les trois morceaux, les trois voussoirs tiennent ensemble par l'élasticité et par la résistance qu'oppose la paroi de l'enveloppe cylindrique, qui sert aussi à leur donner la forme cylindrique. La stéréotomiste taille ces voussoirs sans aucun gabarit, ou plutôt l'artiste suprême a mis ces gabarits dans la tête de l'insecte. Pendant ces excursions de l'arbre au nid et du nid à l'arbre, il faut qu'elle conserve dans son *sensorium* les dimensions des cercles et des ellipses. Après vient l'opération chimique; l'abeille vole de fleur en fleur pour élaborer le miel qu'elle dépose dans la cellule, ainsi qu'un œuf, destiné à devenir successivement ver, chrysalide, mouche; le miel servant de pâture au ver. Pour donner plus de consistance à la cellule, l'abeille met par-dessus encore trois cellules semblables, qui se recouvrent, *s'empilent*, de sorte que chaque cellule est triple et est composée de neuf morceaux triangulaires.

Le miel étant liquide, il faut l'empêcher de s'écouler; l'abeille découpe, toujours dans une feuille de rosier et toujours marchant sur la circonférence, un cercle parfaitement *rond*, d'un diamètre un peu moindre que celui de l'ouverture de la cellule; elle fait entrer de frottement ce cercle dans cette ouverture, et comme pour les cellules, elle empile deux à trois de ces cercles, et y laisse une certaine distance ou certain vide entre cet opercule et l'ouverture. Ayant construit successivement huit ou neuf cellules, elle fait entrer le bout fermé de la seconde cellule dans le vide laissé dans la première cellule; de même la troisième cellule dans la seconde, et ainsi des autres jusqu'à ce que tout le cylindre soit rempli. La dernière cellule restant ouverte, l'abeille la ferme au moyen de la terre qu'elle a déblayée et qu'elle remblaye maintenant, de sorte que le nid est entièrement caché sous terre.

En juillet 1736, un paysan des environs des Andelys, en labourant, trouva de ces cylindres; il crut que c'était un maléfice de quelque sorcier pour faire manquer la récolte. Effrayé, il apporta cette trouvaille au seigneur du village, auditeur de la Chambre des Comptes, et qui habitait Paris; celui-ci consulta son chirurgien, qui s'adressa à l'abbé Nollet; celui-ci envoya le cylindre à Réaumur, qui conjectura aussitôt que cela pouvait bien être le produit d'un travail d'Insecte, et appliquant son génie observateur, il découvrit toutes les opérations qu'on vient de lire; quant au fait, il était déjà connu du célèbre Ray.

Comme tout le genre, cette espèce d'abeilles renferme trois sortes d'individus, mâles, femelles, ouvriers, qui n'ont ni la même taille, ni la même grosseur. Aussi les cellules, toutes de même diamètre, ont des longueurs appropriées aux individus qui doivent éclore. Comment la mère ouvrière peut-elle connaître d'avance le résultat de la ponte? Ce sont là des mystères qui n'ont pas à redouter les attaques des incrédules; toute négation, toute explication est impossible.

Voici ce qu'en conjecture Newton :

Annon sensorium animalium est locus cui substantiâ sentiens adest, et in quem sensibiles rerum species per nervos et cerebrum deferantur, ut ubi præsentes a præsente sentiri possint? Atque his rite expeditis, annon ex phænomenis constat esse entem incorporeum, viventem, intelligentem, omnipræsentem, qui in spatio infinito, tanquam sensorio suo (*), *res ipsas intime cernat, penitusque perspiciat, totasque intra se præsens præsentes complectatur; quarum quidem rerum id quod in nobis sentit et cogitat, imagines tantum ad se per organa sensuum delatas, in sensoriolo suo percipit et contuetur.* » (*Optices* lib. III, questio XXVIII.)

La charmante production de M. Michelet, l'*Insecte*, devrait être donnée en prix dans toutes les Institutions; il y règne une morale pure, élevée, revêtue d'un style où brillent les mêmes qualités; heureuse exception au dévergondage littéraire du jour.

Note bibliographique supplémentaire sur l'Alvéole des abeilles.

Aux renseignements que nous avons donnés (t. XV, p. 175), il faut ajouter :

1°. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1702-1739. On y trouve la question posée par Réaumur à Kœnig, et qui est le point de départ;

(*) Expression qui fait penser à Spinosa.

2°. *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1781. Castillon et Lhuiller traitant la question de *minimum minimorum*, trouvent un polyèdre différent de celui de l'alvéole, et en concluent que l'abeille n'a pas satisfait aux plus économiques conditions; mais lord Brougham, dans le Mémoire cité ci-dessus, fait voir que ces géomètres ont fait une omission qui vicie tous leurs calculs et annule leurs conclusions.

Dans ce même travail, le géomètre anglais démontre que le minimum exige que la largeur du rhombe soit égale au côté de l'hexagone, et réciproquement, de cette égalité on déduit le minimum.

BIOGRAPHIE.

SOPHIE GERMAIN.

Mulierem fortem quis inveniet?
(PROV. ch. XXI, v. 10).

Cette fille de génie vit le jour à Paris le 1er avril 1776, deux ans avant la mort de Voltaire, Rousseau, Lekain. Comme Pascal, elle montra une intelligence précoce, et, ce qui est bien plus rare, un jugement d'une sagesse prématurée et en donna des preuves en cette occasion. Son père(*), membre de l'Assemblée constituante, réunissait souvent chez lui ses collègues, et l'on pense bien que l'on discutait avec ardeur les grandes questions de l'époque. La jeune personne, dévouée aux saintes idées de 89, assistait avec un vif intérêt à ces réunions, mais trouvait qu'on allait trop vite et trop loin, et craignait qu'en surexcitant des passions populaires, on ne tombât sous la

(*) Député de la ville de Paris, demeurant rue Saint-Denis, *au Cabas d'or*; enseigne qui a disparu il y a peu de temps.

tyrannie désordonnée des masses, qui n'ont pour logique que des passions, pour arguments des poings fermés et pour but des intérêts grossièrement matériels. Ces craintes ne tardèrent point à se réaliser. Profondément affligée, la jeune prophétesse chercha à se distraire de ses chagrins dans le monde des abstractions. Elle parcourut l'*Histoire des Mathématiques* de Montucla, étudia Bezout, et, pendant les saturnales sanguinaires de 93, elle ne quittait presque plus la maison; se séquestrant volontairement, elle s'enfonça dans les méditations sur la théorie des nombres et sur le calcul infinitésimal qu'elle apprit dans les œuvres de Legendre et de Cousin. Ses progrès furent si considérables, si rapides, qu'en 1801 elle entra en commerce épistolaire avec Gauss, sous le pseudonyme d'un élève de l'École Polytechnique; d'abord sur les *Disquisitiones*, qui venaient de paraître, et ensuite sur des sujets dignes d'un tel correspondant. Pendant la campagne de 1804, le général d'artillerie Pernetty, ami de la famille Germain, étant venu à Brunswick, découvrit à l'illustre mathématicien le vrai nom de ce prétendu élève dont il n'avait jamais soupçonné le sexe. Sa surprise fut extrême, et ses lettres subséquentes portent le témoignage de sa haute admiration pour l'esprit profond et pénétrant de la jeune Française: admiration d'autant plus sincère, qu'alors le professeur allemand, froissé dans ses affections, dans son bien-être (*), n'éprouvait que des sentiments de répulsion pour notre nation.

Connu et apprécié de Lagrange, Laplace, Legendre,

(*) Le duc de Brunswick, mort si misérablement à la suite de la bataille d'Iéna, bienfaiteur de Gauss, avait pourvu aux frais de ses études. Dans la contribution de guerre imposée à la ville de Gottingue, la part de Gauss fut assez forte; Laplace l'acquitta à Paris, mais Gauss ne voulut pas accepter cet acte de générosité, et se libéra plus tard, voulant même payer les intérêts.

Lacroix, ce talent éminent restait ignoré du public géomètre. Ce fut le travail d'un physicien allemand qui donna de l'éclat au nom de Sophie Germain.

En 1810, Chladni, se dirigeant vers Paris, séjourna quelque temps à Mayence où j'étais alors professeur; il voulait bien partager quelquefois mes repas; sa conversation était extraordinairement intéressante. Doué d'une mémoire surprenante, il savait par cœur des chants entiers d'Homère, de Virgile, du Tasse, de Schiller, et connaissait l'histoire des sciences : hommes, ouvrages, dates Il portait à Paris le clavi-cylindre, piano à sons prolongés, et de plus ses célèbres figures *acoustiques :* il s'était rendu très-habile exécutant sur son instrument et comptait faire sensation plutôt comme artiste que comme savant. L'exécution me semblait traînante, larmoyante, élégiaque et d'une impression monotone, fatigante. M'apercevant qu'il avait une susceptibilité d'artiste, je n'osai lui découvrir *entièrement* ma façon de penser.

Il vint à Paris; on s'occupa peu de son piano, mais ses belles expériences acoustiques attirèrent même l'attention de Napoléon. Il invita l'Institut à proposer pour sujet de prix extraordinaire le mouvement moléculaire des plaques élastiques. Lagrange considérait la question comme présentant des difficultés presque insurmontables : Sophie osa l'aborder. En 1811, elle présenta une solution renfermant une équation défectueuse corrigée par Lagrange; en 1813, elle obtint une mention honorable, et finit en 1815 par remporter le prix. Ce succès répandit la réputation de notre célèbre compatriote dans le monde mathématique, la rangea désormais parmi ces êtres privilégiés qui, planant dans les hautes régions, aperçoivent et créent même des oasis dans des saharas. Depuis, elle développa et perfectionna la théorie des surfaces élastiques dans divers Mémoires insérés dans des recueils scientifiques. En arithmologie, elle démontra des théorèmes nouveaux, que Legendre a admis dans son ouvrage. Une maladie cruelle mit fin à ses progrès, mais non à l'activité de son esprit. Au milieu des douleurs atroces d'un cancer, elle se livrait à une composition philosophique que le mort vint interrompre. C'est ainsi que Condorcet, traqué et enfin déchiré par des tigres qu'il avait aidé à démuseler, rêva ses *progrès de l'esprit humain,* merveilleux édifice auquel il manque le nom de l'*architecte* (*voir* la Note).

Le 17 juin 1831 mit fin aux tortures et à la vie de l'illustre demoiselle âgée seulement de cinquante-cinq ans; c'était une perte déplorable pour la science et pour la société. Elle était belle-sœur du membre de l'Institut Dutrochet, qui a attaché son nom à l'*endosmose.* Son neveu, M. Lherbette, député de l'Aisne, qui, sous la Restauration, a souvent défendu la cause libérale avec énergie et talent, a trouvé dans les papiers de sa nièce l'opuscule dont nous parlerons plus loin. Nul doute que les lettres de Gauss ont été conservées de même que celles de Sophie dans les papiers de Gauss. La publication de cette correspondance offrirait un haut intérêt de curiosité et d'instruction. L'opuscule publié deux années après la mort de l'auteur n'existe plus dans le commerce; une nouvelle édition est très-désirable.

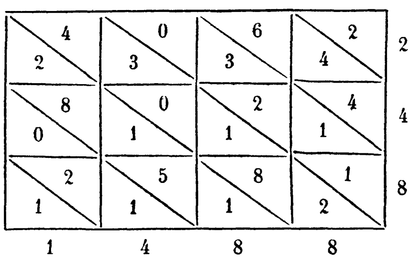
Note. On lit à la fin du huitième livre de l'*Anti-Lucrèce* du cardinal de Polignac (vers 1741) ces belles pensées :

Silicet astronomos et qui cœlestia quondam
Lustrarunt occulis et quos nova protulit ætas
Contemplatores, æterna nomine dignos
Censuimus, quod sint ausi signare figuram
Astrorum, et spatia, et moles variosque meatus,

Et causam supremam ipsis quæ tradidit astris
Materiam, formam atque situm, normamque movendi
Legitimo, ingrati, laudum fraudamus honore!
Est grave mentis opus charta describere cœlum
Ac terras, duplicique globo diversa notare
Climata, sidereumque rotis effingere motum.
Et potuit sine menti fabri consistere mundus!
O pudor! O miseræ vecors insania gentis!
O mirum artificem! Quis tam præclara videndo
Non stupeat genus esse hominum qui talia casu
Facta velint, et materiæ sine more vaganti
Accepta hæc referant; cum non sine mente, sine arte
Tot portentorum reddi mera possit imago!

PROCÉDÉS DE MULTIPLICATION USITÉS AU MOYEN AGE EN ITALIE.

1°. La figure explique suffisamment le procédé. C'est la multiplication de 4567 par 326. On fait les additions diagonalement. Le produit écrit autour est 1488842.



Ce procédé se nomme *per gelosia*. La figure simule les jalousies d'une fenêtre.

Notre procédé actuel portait ces trois noms :

2°. *Per scacchero,* par échiquier:

Per baricocolo, espèce de petits gâteaux ronds;

Per organetto, petit orgue.

Il y avait encore les procédés :

3°. *Per colonna.* On multiplie de tête tout le multiplicateur par chaque chiffre du multiplicande et on n'écrit que les unités en retenant les excédants; de sorte qu'on obtient tout de suite le produit sans avoir recours aux produits partiels.

4°. *Per repiego,* par composition; plutôt par décomposition en *facteurs.*

5°. *Per crosetta,* en croix. On additionne *de tête* toutes les unités, les dizaines, les centaines, etc., ce qui oblige de multiplier en croix, et on obtient le produit sur une seule ligne. Ce procédé est encore en usage dans la multiplication par approximation.

6°. *De Fiorentini,* des Florentins. On fait la multiplication de gauche à droite.

7°. *Per spezzatamento,* par morcellement. On décompose le multiplicateur par voie d'addition; ce qui rend l'opération moins pénible. Exemple :

$$20 = 3 + 4 + 5 + 8;$$

le produit par 6 se conclut de celui par 3; 8 de celui par 4, et 5 n'exige qu'une dimidiation.

(Tartaglia, *General Trattato di numeri,* libro secondo, p. 26). Cet ouvrage de 1546 contient beaucoup de prix de denrées et de marchandises qui présentent de l'intérêt pour les *économistes.*

EXTRAIT D'UNE LETTRE.

Le n° 1 de 1858 du Bulletin de la Société des Sciences historiques du département de l'Yonne renferme diverses lettres de l'illustre Fourier.

Dans celle du 22 mai 1788, adressée à M. Bonnard, son maître et son ami, datée de l'abbaye de Saint-Benoît-sur-Loire, où il commençait alors son noviciat de bénédictin, on y trouve l'énoncé d'une question qui peut-être par sa singularité pourra, si vous le jugez convenable, être soumise aux lecteurs des *Nouvelles Annales*.

« Voici, dit Fourier à son ami, une question d'un » genre assez singulier. Elle me vient dans l'esprit au » sujet de certaines propositions d'Euclide dont nous » avons parlé quelquefois.

» *Disposer dans un même plan* 17 (m) *lignes droites* » *de manière qu'elles donnent* 101 (n) *points d'inter-* » *section. Il faut supposer les lignes prolongées à l'in-* » *fini et qu'un point d'intersection n'appartienne pas* » *à plus de deux lignes. Il faut ramener le problème à* » *une pure analyse, en sorte que m et n étant déter-* » *minés, on puisse parvenir aux équations nécessaires.* »

Dans une autre lettre, Fourier déplore le malheur de sa situation.

« N'est-ce pas, dit-il, être condamné à l'ignorance » que de ne pouvoir lire d'autres ouvrages que les siens. » C'est une privation dont toute la philosophie ne peut » se consoler. Je n'ai de livres à lire qu'un chétif exem- » plaire de Montaigne auquel il manque des feuillets que » je suis réduit à deviner. Je m'occupe un peu de grec; » vous croirez bien que c'est plutôt pour lire Euclide et » Diophante que Pindare et Démosthènes....

Et plus loin :

» J'ai encore travaillé ces méthodes d'élimination; il » n'est pas difficile de reconnaître combien celles dont » on fait usage sont défectueuses, mais il l'est beaucoup » de leur en substituer de meilleures. Vous voyez bien

» qu'il faudrait que j'eusse sous les yeux l'ouvrage de » M. Bezout sur le même sujet. Seul et sans secours, on » peut méditer mais non découvrir : souvent on fuit les » hommes, on en devient meilleur mais non plus savant. » Le cœur y gagne et l'esprit y perd, etc. »

Cette lettre est datée du 22 mars 1789, et à la suite se trouvent ces mots où le grand analyste laisse entrevoir la prescience de sa grandeur future.

« Hier j'ai eu vingt-quatre ans accomplis ; à cet âge » Pascal et Newton avaient acquis bien des droits à l'im- » mortalité. »

FOURNERAT,
Membre de la Société historique de l'Yonne,
à Ancy-le-Franc.

MACHINE A CALCULER DE SCHEUTZ PERFECTIONNÉE.

Tout géomètre connaît la célèbre machine à calculer les séries, due au génie de M. Scheutz, Suédois, ou du moins en a entendu parler. Cette machine est fondée sur la théorie des différences introduite aujourd'hui dans l'enseignement. M. Donkin, célèbre constructeur anglais, vient d'apporter quelques perfectionnements à cette admirable production. Un rapport *approbatif* est signé par MM. G.-G. Stokes, C. Wheatstone, R. Villis, et un second rapport *aussi approbatif* par l'illustre astronome G.-B. Airy (en date du 31 août 1859). Par cette machine perfectionnée une Table d'*annuité sur la vie* a été *calculée* et *imprimée* en soixante-quinze minutes ; un calculateur par la voie ordinaire y mettrait cent soixante-quinze minutes, et encore le contrôle exige deux calculateurs. On ne peut rien ajouter à de tels noms, à une telle expérience.

BIBLIOGRAPHIE.

JOURNAL FUR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK

(CRELLE, t. LVII, 2e cahier, 1859)

(voir t. V, p. 76)

Mécanique.

A. CLEBSCH (de Carlsruhe) (p. 93 à 110). *Sur la figure d'un fil flexible.*

Connaissant la fonction des forces, Jacobi ramène les équations du mouvement à une certaine équation aux différences partielles. M. Clebsch applique la même méthode à la recherche de la figure que prend un fil flexible soumis à l'action de diverses forces en équilibre; le Mémoire contient neuf paragraphes :

1°. *Équations générales.* U étant la fonction des forces, T la torsion qu'éprouve l'élément ds, toute la théorie repose sur ce que $\int \mathrm{U}\, ds$ doit devenir un maximum entre des limites données. On trouve pour l'équation aux différences partielles

$$\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{V}}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{V}}{dz}\right)^2 = \left(\frac{d\mathrm{V}}{ds} + \mathrm{U}\right)^2; \quad \mathrm{T} = -\frac{d\mathrm{V}}{ds} - \mathrm{U};$$

où V est une fonction de x, y, z, s, renfermant trois constantes arbitraires h, a, b, et l'on trouve pour la figure cherchée

$$\varkappa = \frac{d\mathrm{V}}{dh}, \quad \alpha = \frac{d\mathrm{V}}{da}, \quad \beta = \frac{d\mathrm{V}}{db},$$

$\varkappa$, α, β sont trois nouvelles constantes.

2°. La chaînette ordinaire.

3°. Les deux extrémités du fil sont attachées à un axe de rotation; la figure d'équilibre est telle, que le moment d'inertie du fil relativement à l'axe devient un maximum, elle est indépendante de la grandeur de la vitesse initiale; et on ramène l'intégrale à une fonction elliptique de troisième espèce. La figure est hélicoïde, se rapprochant et s'éloignant alternativement de l'axe.

4°. Lorsque le fil n'est pas libre; il est tenu de rester sur une surface donnée.

5°. Lorsque la surface donnée est de révolution.

6°. La chaînette sur la sphère.

7°. Fil sur une sphère tournant autour d'un diamètre.

8°. Fil mince doué d'élasticité, et dont la section transversale est si médiocre, qu'on peut négliger la résistance à la flexion.

9°. Fil mince soumis à la pesanteur.

Les deux derniers problèmes sont résolubles par des équations analogues à celles qu'on a trouvées pour les fils privés d'élasticité.

A. Clebsch (p. 149 à 168). *Sur l'équilibre des corps flottants.*

La plus ancienne théorie sur la stabilité des corps flottants est celle du *métacentre*. En supposant le corps infiniment peu dérangé de sa position, on cherche les conditions qui doivent être remplies pour que le corps manifeste des dispositions à revenir dans sa première position, et l'on regarde la position comme stable et seulement stable lorsque cette condition était remplie. Cette théorie a été critiquée et rectifiée par M. Duhamel (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXIV). On pourrait signaler encore d'autres défauts de l'ancienne théorie, il peut se faire que le corps, dans le premier moment, ne soit pas ramené, augmente, s'écarte davantage et soit ramené par l'effet des pressions *hydrodynamiques* avant que les oscillations aient acquis une étendue appréciable. Dans ce cas le corps serait stable, contrairement à la règle du métacentre.

Abandonnant cette règle, on chercha les équations des oscillations du corps, et l'on s'approcha ainsi d'une solution plus rigoureuse; on trouve ces équations dans les traités de Poisson et de M. Duhamel. Toutefois ces équations sont fondées sur la supposition que, dans ces mouvements infiniment petits, on peut remplacer les pressions *hydrodynamiques*, celles qui résultent du mouvement du fluide, par les pressions *hydrostatiques* que le fluide exerce quand il est en repos. Il est vrai que ces deux sortes de pressions diffèrent de quantités infiniment petites, de l'ordre des vitesses; ce qui n'autorise pourtant pas à négliger les pressions hydrodynamiques; car dans le voisinage de l'équilibre les pressions hydrostatiques se détruisent mutuellement; mais il n'en est pas ainsi des pressions hydrodynamiques, car elles réagissent contre le mouvement du corps, et leurs effets sont du même ordre que l'effet *total* de la pression hydrostatique.

Il résulte de là que les équations de mouvement des corps flottants données jusqu'ici sont non-seulement inexactes, ne donnant au plus qu'une première approximation, mais sont complétement *fausses*, car elles négligent des termes de même ordre que ceux que l'on conserve.

M. Clebsch, et c'est le point principal de ce Mémoire, a égard aux termes négligés, et parvient, pour représenter le mouvement des corps, à une équation transcendante, par conséquent susceptible d'une infinité de formes, et la stabilité a lieu lorsque cette équation n'admet que des racines négatives. La difficulté du problème n'a pas permis de traiter à fond un cas spécial, et encore moins d'indiquer une règle générale simple.

Analyse.

C. W. Borchardt (p. 111 à 121). *Sur la représentation d'une résultante d'élimination correspondante à une représentation interpolatoire.*

Soit

$$\varphi(x) = 0$$

une fonction entière donnée par les valeurs

$$x = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,$$

faisons

$$f(x) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n),$$

on a

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\varphi\alpha_i}{f'\alpha_i}\frac{fx}{x - \alpha_i}$$

(théorème connu).

C'est ce développement de φx qui est la représentation *interpolatoire* de φx.

Le but de ce Mémoire est celui-ci :

Soient les deux fonctions algébriques entières de degré n

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = 0;$$

chacune de ces fonctions est donnée par les *valeurs* qu'elles prennent en faisant

$$z = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,$$

c'est-à-dire qu'on donne $\varphi\alpha_i$, $\psi\alpha_i$, i prenant les valeurs depuis zéro jusqu'à n ; l'élimination de z donne une *résul-*

tante fonction des coefficients qu'on trouve de ces fonctions, et ces coefficients sont des fonctions de $\varphi\alpha_i$, $\psi\alpha_i$; il s'agit d'établir *directement,* immédiatement cette résultante en fonctions de $\varphi(\alpha_i)$, $\psi(\alpha_i)$.

M. Cayley a démontré (*Nouvelles Annales,* t. XVIII, p. 397), que si l'on développe l'expression

$$\frac{\varphi(r)(\psi y) - \varphi y \,\psi x}{y - x} = \mathrm{F}(x, y),$$

suivant les puissances de x et de y, et $a_{ik}\,x^i\,y^k$ étant un terme général. Alors le déterminant D formé par les coefficients a_{ik} (i et k prennent les valeurs de 0 à n) donne la résultante. M. Borchardt suppose que les fonctions φx et $\psi(x)$ sont données sous forme interpolatoire

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\varphi\alpha_i}{f'\alpha_i}\frac{fx}{x-\alpha_i},$$

$$\psi x = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi\alpha_i}{f'\alpha_i}\frac{fx}{x-\alpha_i}.$$

Par d'admirables considérations sur un déterminant d'ordre $(n+1)^2$, le célèbre analyste parvient à trouver D en fonction de $\mathrm{F}(\alpha_i, \alpha_k)$; i et k prenant toutes les valeurs de 0 à n.

M. Rosenham a le premier traité cette importante question (Crelle, t. XXX), en supposant que $\varphi(z)$ est donné par les n valeurs $\varphi(\alpha_i)$ et $\psi(z)$ par les n autres valeurs $\psi(\beta_i)$; pour passer à la forme interpolatoire, il faut supposer que les α et les β coïncident, ce qui amène une grande complication, que M. Borchardt a évitée en abordant le problème directement. On apprécie l'utilité de ces recherches en considérant que dans les sciences physiques, les fonctions ne sont données que par leurs valeurs numériques.

C. W. Borchardt (p. 183 à 186). *Comparaison entre deux formes de la résultante d'élimination d'une inconnue entre deux équations.*

1°. Première méthode d'Euler :

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots$$
$$a_0 = a_m (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_m),$$
$$\varphi(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots$$
$$+ b_0 = b_m (x - \beta_1)(x - \beta_2)\ldots(x - \beta_m).$$

On forme le produit

$$P = \prod_{i=1}^{i=m} \prod_{k=1}^{k=n} (\beta_k - \alpha_i).$$

Désignant la résultante de l'élimination x entre $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ par R, on obtient

$$R = a_m^n b_n^m P$$

$$P = (-1)^{mn} a_m^n \varphi\alpha_1 \varphi\alpha_2 \ldots \varphi\alpha_m = b_n^m f\beta_1 f\beta_2 \ldots f\beta_m.$$

Pour avoir P, désignons par $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ le produit $\alpha_k - \alpha_i$; on prend toujours $k > i$; Δ est connu en fonction des coefficients de $f(x)$.

Posons

$$A = \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m),$$
$$B = \Delta(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m).$$

$$D = \begin{vmatrix} 1, & \beta_1, & \beta_2^2, \ldots, & \beta_2^{m+n-1} \\ 1, & \beta_1, & \beta_2^2, \ldots, & \beta_2^{m+n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & \beta_n, & \beta_2^2, \ldots, & \beta_n^{m+n-1} \\ 1, & \alpha_1, & \alpha_1^2, \ldots, & \alpha_1^{m+n-1} \\ 1, & \alpha_2, & \alpha_2^2, \ldots, & \alpha_2^{m+n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & \alpha_n, & \alpha_n^2, \ldots, & \alpha_n^{m+n-1} \end{vmatrix}$$

on aura $D = (-1)^{mn} ABP$, d'où $P = \frac{D}{AB}$.

2°. Deuxième méthode d'Euler; = celle de Bezout; = *dialytique* de Sylvester.

On élimine les puissances $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{m+n-1}$ entre les $m+n$ équations

$$0 = fx;\quad 0 = xfx;\ \ldots,\ 0 = x^{n-1}fx,$$
$$0 = \varphi x;\quad 0 = x\varphi x;\ \ldots,\ 0 = x^{m-1}\varphi x,$$

et l'on obtient la résultante, au moyen du déterminant

$$\begin{array}{r} T = 0 \\ 1 \\ \ldots\ldots \\ n-1 \\ n \\ n+1 \\ \ldots\ldots \\ m+n-1 \end{array} \begin{vmatrix} a_0, & a_1, \ldots, a_m, & 0.0, \ldots\ldots, 0 \\ 0 & a_0, \ldots, a_{m-1} & 0.0, \ldots\ldots, 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0, \ldots\ldots, & 0.0\,a_0, a_1, \ldots, a_m \\ b_0, & b_1, \ldots\ldots, & b_{n-1}, b_n, 0, \ldots, 0 \\ 0_0, & b_0, \ldots\ldots, & b_{n-1}, b_n, 0, 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \ldots & \ldots 0, b_0, & b_1, \ldots\ldots b_n \end{vmatrix}$$

Les chiffres placés à gauche du premier trait indiquent les rangs des lignes horizontales.

Il faut démontrer l'*identité* $T = R$.

Multipliant, d'après la règle connue, les déterminants D et T, on obtient un nouveau déterminant, lequel étant développé donne

$$D.T = AB f\beta_1 f\beta_2 \ldots f\beta_n . \varphi\alpha_1 \varphi\alpha_2 \ldots \varphi\alpha_n$$

$$= (-1)^{mn} a_m^n\ b_n^m A\ B . P^2;$$

d'où

$$T = a_m^n\ b_n^m P = R.$$

O. Hesse (à Heidelberg) (p. 175 à 182). *Nouvelles propriétés des substitutions linéaires qui transforment des fonctions homogènes du second degré en d'autres qui ne contiennent que les carrés des variables.*

M. Kummer est parvenu le premier à décomposer en carrés le carré du produit des différences des racines d'une équation cubique, problème d'où dépend la recherche des axes principaux d'une surface du second ordre (Crelle, t. XXVI, p. 268).

Ensuite M. Borchardt, à l'aide de la théorie des déterminants, est arrivé au même résultat, et l'a généralisé pour une fonction de degré n; ce qui fournit un moyen de calculer les perturbations planétaires (Crelle, t. XXX, p. 38).

Déjà Jacobi avait déduit le résultat Kummer de formules entièrement nouvelles (*Giornale Arcadico*, t. XLVIII), et (Crelle, t. XXX, p. 46); la dernière de ces formules est surtout importante; elle conduit à des propriétés nouvelles, but de ce Mémoire.

Soient X_1, $X_2, \ldots, X_n$, n variables liées aux n variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$ par les n équations linéaires

$$(1) \qquad X_\varkappa = a_1^{(\varkappa)} x_1 + a_2^{(\varkappa)} x_2 + \ldots + a_n^{(\varkappa)} x_n;$$

$\varkappa$ prenant successivement les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$, on en déduit

$$(2) \qquad x_\varkappa = e_1^{(\varkappa)} X_1 + e_2^{(\varkappa)} X_2 + \ldots + e_n^{(\varkappa)} X_n,$$

formons un nouveau système de n équations

$$(3) \qquad Y_\varkappa = e_1^{(\varkappa)} y_1 + e_2^{(\varkappa)} y_2 + \ldots + e_n^{(\varkappa)} y_n,$$

d'où l'on déduit

$$(4) \qquad y_\varkappa = a'_\varkappa Y_1 + a''_\varkappa Y_2 + \ldots + a_n^{(n)} Y_n,$$

et aussi l'identité

$$(5) \quad X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \ldots + X_n Y_n = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \ (*).$$

Si l'on élève les deux membres de l'équation (5) à la $n^{ième}$ puissance, et si l'on supprime de part et d'autre le produit continu $\prod(n) = 1.2.3\ldots n$, on obtient l'identité

$$(7) \quad \begin{aligned} &\sum \frac{1}{C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n} Y_1^{\alpha_1} Y_2^{\alpha_2} \ldots Y^{\alpha_n}, \\ = &\sum \frac{1}{C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_n^{\alpha_n}, \end{aligned}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n,$$

$$C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = \prod(\alpha_1) \prod(\alpha_2) \ldots \prod(\alpha_n).$$

(*) Le lecteur peut vérifier en posant $n = 2$.

Remplaçons dans le produit $y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_n^{\alpha n}$, les y par des Y déduits de l'équation (4), et désignons dans ce développement le coefficient de $y_1 y_2 \ldots y_n$ par

$$C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha n} \quad A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha n},$$

où $A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha n}$ est une fonction rationnelle entière des a, et on laisse $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha}$.

Alors le coefficient de $Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ dans le premier membre est $X_1 X_2 \ldots X_n$.

Et dans le second membre $\sum A_{\alpha_1 \alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$.

Donc

$$(8) \qquad X_1 X_2 \ldots X_n = \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} x_2^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha n}.$$

De même si l'on développe $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha n}$ à l'aide de l'équation (3), et qu'on désigne par

$$C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} E_{\alpha_1 \alpha_1 \ldots \alpha_n},$$

les coefficients de $X_1 X_2 \ldots X_n$, où E est composé en e comme A en a, on aura

$$(9) \qquad Y_1 Y_2 Y_3 \ldots Y_n = \sum E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_n^{\alpha n}$$

Si l'on développe l'équation (7) suivant les puissances et les produits de x et y, et qu'on égale des deux côtés les coefficients de $X_1 X_2 \ldots X_n$ et de $Y_1 Y_2 \ldots Y_n$, on a

$$(10) \qquad 1 = \sum C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n},$$

premier nouveau théorème, déduit des substitutions linéaires.

Si

$$X = Y,$$

alors

$$X^2 + X_1^2 + \ldots + X_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$

et

$$(11) \qquad 1 = \sum C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} (A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n})^2,$$

second nouveau théorème, qui décompose l'unité en carrés.

M. O. Hesse donne encore d'autres belles propriétés, ainsi que les formules de Jacobi.

ORIGINE PREMIÈRE DES DÉTERMINANTS,

LEIBNIZ (1693).

Dans une Lettre de Leibniz à L'Hospital, datée de Hanover (*sic*) 28 avril 1693, et insérée dans le t. II, p. 238-241 des *Leibnizens mathematische Schriften*, édités par C.-I. Gerhardt, Berlin, 1850, on lit :

« Puisque vous dites que vous avés de la peine à croire qu'il soit aussi general et aussi commode de se servir des nombres que de lettres, il faut que je ne me sois pas bien expliqué. On ne sçaurait douter de la generalité en considerant qu'il est permis de se servir de 2, 3, etc., comme de *a* ou de *b*, pour veu qu'on considere que ce ne sont pas des nombres veritables. Ainsi 2.3 ne signifie point 6, mais autant qu'*ab*. Pour ce qui est de la commodité de l'epreuve par des nombres, et même par l'abjection du novenaire, j'y trouve un tres grand avantage même pour l'avancement de l'analyse. Comme c'est une ouverture assez extraordinaire, je n'en ay pas encore parlé à d'autres, mais voicy ce que c'est. Lorsqu'on a besoin de beaucoup de lettres, n'est-il pas vray que ces lettres n'expriment point les rapports qu'il y a entre les grandeurs qu'elles signifient, au lieu qu'en me servant des nombres je puis exprimer ce rapport. Par exemple soyent proposées trois equations simples pour deux inconnues à dessein d'oster ces deux inconnues, et cela par un canon general. Je suppose

(1) $$10 + 11x + 12y = 0$$

et

(2) $$20 + 21x + 22y = 0$$

et

(3) $$30 + 31x + 32y = 0,$$

ou le nombre feinst estant de deux characteres, la première me marque de quelle equation il est, le second me marque à quelle il appartient (*). Ainsi en calculant on trouve par tout des harmonies qui non seulement nous servent de garans, mais encore nous font entrevoir d'abord des règles ou théorèmes. Par exemple ostant pre-

---

(*) Ces equations d'après l'écriture actuelle sont

$$a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0,$$
$$a_{20} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0,$$
$$a_{30} + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = 0.$$

Eliminant x_1, x_2, on a le determinant

$$[a_{10}\ a_{21}\ a_{32}] = 0$$

que trouve Leibniz; il fait cette operation par la voie ordinaire des multiplications.

mierement y par la première et seconde equation, nous aurons

$$(4) \qquad \left.\begin{matrix} +10.22 + 11.22x \\ -12.20 - 12.21.\,. \end{matrix}\right\} = 0,$$

et par la première et troisième nous obtenons

$$(5) \qquad \left.\begin{matrix} +10.32 + 11.32x \\ -12.30 + 12.31\ldots \end{matrix}\right\} = 0,$$

où il est aisé de connoistre que ces deux équations ne different qu'en ce que le charactere antecedant 2 est changé au charactere antecedant 3. Du reste, dans un même terme d'une même equation les characteres antecedants sont les mêmes et les characteres posterieurs font une même somme.

» Il reste maintenant d'oster la lettre x par la quatrieme et cinquieme equation, et pour cet effect nous aurons

$$\left.\begin{matrix} 1_0\ 2_1.3_2 \\ 1_1.2_2.3_0 \\ 1_2.2_0.3_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1_0\ 2_0.3_1 \\ 1_1.2_1.3_2 \\ 1_2\ 2_2.3_0 \end{matrix}\right. \quad (*)$$

qui est la dernière équation délivrée des deux inconnues qu'on voulait oster, et qui porte sa preuve par soy par les harmonies qui se remarquent par tout, et qu'on auroit bien de la peine à découvrir en employant des lettres a, b, c, surtout lors que le nombre des lettres et des equations est grand. Une partie des secrets de l'analyse consiste dans la caracteristique, c'est à dire dans l'art de bien employer les notes dont on se sert, et vous voyés, Monsieur, par ce petit echantillon, que Viete et Des Cartes n'en ont pas encore connu tous les mysteres En poursuivant tant soit peu ce calcul, on viendra à un theoreme *general*

(*) Ici Leibniz ecrit le second caractere sous la forme actuelle d'indice pour quelque nombre de lettres et d'equations qu'on puisse prendre. Le voicy comme je l'ai trouvé autre fois :

» *Datis æquationibus quotcunque sufficientibus ad tollendas quantitates, quæ simplicem gradum non egrediuntur, pro æquatione prodeunte, primo sumandæ sunt omnes combinationes possibiles, quas ingreditur una tantum coefficiens uniuscujusque æquationis; secundo, eæ combinationes opposita habent signa, si in eodem æquationis prodeuntis latere ponantur, quæ habent tot coefficientes communes, quot sunt unitates in numero quantitatum tollendarum unitate minuto; cæteræ habent eadem signa* (*).

» J'avoue que dans ce cas de degré simple on auroit peut estre decouvert le même theoreme en ne se servant que de lettres à l'ordinaire, mais non pas si aisement, et ces adresses sont encore bien plus necessaires pour découvrir des theoremes qui servent à oster les inconnues montées à des degrés plus hauts. Par exemple pour oster la lettre x par le moyen de deux equations dont l'une est de trois degrés et l'autre de deux, je suppose

$$10x^3 + 11x^2 + 12x + 13 = 0$$

et

$$20x^2 + 21x + 22 = 0,$$

où le caractere anterieur du coefficient marque le degré dont il est coefficient, en remplissant la loi des homogenes (**), ce qui sert à les observer dans tout le pro-

---

(*) Tous les termes etant dans le même membre, le nombre des inconnues etant n, les termes qui ont en commun $n - 2$ coefficients ont des signes opposes et les autres ont même signe.

(**) Cela revient a

$$a_{10}x^3 + a_{11}x^2 + a_{12}x + a_{13} = 0,$$
$$a_{20}x^2 + a_{21}x + a_{22} = 0,$$

la somme des indices et des exposants est toujours 4 grès de l'opération. Dans les equations plus hautes, pour mieux s'assurer du calcul, on peut au lieu du dernier terme prendre un nombre tel que l'équation donneroit en prenant x pour l'unité ou pour quelque nombre veritable, par exemple au lieu de

$$10x^3 + 11x^2 + 12x + 13 = 0,$$

on pourroit ecrire

$$10x^3 + 11x^2 + 12x - 11220;$$

prenant x pour 10, pourveu qu'on se souvienne que 11220 signifie un solide ou une grandeur de trois dimensions (*); ainsi le calcul se verifiera toujours en nombres veritables et se pourra même examiner à tout moment par l'abjection du novenaire, ou de l'ondenaire, et neantmoins les harmonies paroistront par tout substituant 13 pour 11220. En calculant ainsi on trouvera des theoremes et on dressera les tables que j'ay souhaittées. On voit aussi par là une chose que j'ai indiquée dejà dans les occasions, c'est que la perfection de l'analyse depend de l'art des combinaisons qui est proprement la specieuse generale (**). »

La réponse de l'Hospital est datée de Paris, 15 juin 1693 :

« C'est avec un plaisir sensible, Monsieur, que je reçois vos lettres, j'y trouve toujours des vûes nouvelles auxquelles personne n'avoit encore pensé. La manière

---

(*) Prenant

$$x = a_{10},$$

on prend pour terme tout connu

$$a_{10}^4 + a_{11} a_0^2 + a_{12} a_0.$$

(**) *Spécieuse* dans le sens de Viète, et signifie la représentation figurée de quantités.

dont vous vous servez des nombres au lieu de lettres dans les equations pour en tirer ensuite des regles ou théoremes est tres ingenieuse, et comme l'analyse n'est que l'art d'abbreger les raisonnements et de representer tout d'une vûe à l'esprit ce qu'il ne pourrait appercevoir autrement que par un long circuit, il est certain que les caracteristiques en font la principale partie. Je ne doute pas que celle dont vous vous servez pour exprimer la situation des angles et des lignes, et que vous appellez *caracteristica situs,* ne contienne quelque chose de tres beau et de tres utile. Vous m'en eclaircirez davantage quand vous le jugerez à propos; je crois avoir oui dire que vous aviez aussi imaginé une espece de caracteristique pour servir à composer des machines de mecanique, cela peut estre d'un grand usage dans cette science qui n'est pas encore arrivée à la perfection (*). »

Ainsi l'origine des déterminants remonte à 1693 (**); c'est un nouveau bijou dans le splendide écrin immensément riche de l'auteur de la hiérarchie et de la caractéristique infinitésimales. Il a découvert non-seulement les déterminants de Cramer (1750), mais ce qui encore est plus essentiel, la caractéristique de Vandermonde (1772); l'admiration est au comble quand on entend l'illustre prophète proclamer, deux siècles d'avance, la haute position de cette caractéristique combinatoire dans toute l'analyse, position qui n'a été révélée que de nos jours.

Si l'on me demandait quelle est l'intelligence la plus intense en profondeur, la plus universelle en directions,

---

(*) Se trouve dans une lettre a Huyghens datée de Hanovre, 8 septembre 1679 (GERHARDT, t. II, p. 20). M. Babbage a inventé quelque chose d'analogue pour les machines.

(**) Date malheureusement trop mnémonique.

dont Dieu ait gratifié la terre, depuis l'apparition de l'homme, je répondrais, sans hésiter : LEIBNIZ.

Les esprits sérieux, amis des fortes méditations, doivent une vive reconnaissance à MM. George Henri Perthes, C.-I. Gerhardt et à notre compatriote le comte Foucher de Careil. Il est à désirer qu'on voulût bien pour la partie mathématique consulter quelque géomètre *lettré*. Lorsque dans ce siècle *utilitaire* on rencontre un homme vouant à la science *abstraite* ses veilles, sa fortune, c'est découvrir inopinément une source vivifiante au milieu d'un Sahara; nouvelle gloire que la France peut ajouter à tant d'autres.

Inter scabiem tantam et contagia lucri
Nil parvum sapit et semper sublimia curat.

(HORAT, *Epist.* XII, lib. I, ad Iccium.)

BIBLIOGRAPHIE.

SULLA GEOMETRIA ANALITICA DELLE LINEE PIANE. Opuscolo di *Giuseppe Sacchi*, dottore in matematica. Pavia, 1854; in-8 de VIII-131 pages; 1 planche lithographiée.

En 1850, le célèbre Bordoni, dont la science déplore la perte récente (*), après quarante années de service universitaire prit sa retraite, et M. Sacchi le remplaça comme *suppléant* dans la chaire de Géodésie et d'Hydro-

(*) Le 26 mars 1860. Il a appliqué le calcul des probabilités aux examens universitaires. Nous ferons connaître ce Mémoire, si nous parvenons à nous le procurer. Jouissant d'une haute réputation au delà des Alpes, il est complètement inconnu en deçà. L'abbé Julien est le premier et le seul géomètre français qui l'ait cité dans ses excellents *Problèmes de Mécanique rationnelle*.

métrie. Il fit ce cours pendant huit années et enrichit la collection d'instruments appropriés à ce cours. Deux fois Bordoni le proposa au gouvernement autrichien pour être nommé *définitivement*; mais s'étant attiré l'animadversion de ce gouvernement, il fut éloigné de Pavie et on le nomma professeur au lycée dit de *Porte-Neuve* à Milan, dont le directeur était *commissaire de police*. Occupant encore la même position, il est permis d'espérer que sous le régime actuel on réparera cette longue injustice, et qu'on replacera M. Sacchi à l'université de Pavie, position où l'appellent ses talents et qui est aussi dans l'intérêt de l'enseignement. L'analyse suivante est une pièce justificative.

Beaucoup de systèmes de coordonnées ont maintenant cours dans l'enseignement. Pour chaque question, il faut savoir discerner le système qui facilite la solution. Souvent même il convient d'imaginer un système approprié à la question. Lorsqu'une fonction représente une ligne sur une surface donnée et que la même fonction représente une ligne sur une autre surface donnée, mais ces coordonnées ayant une signification différente, alors beaucoup de propriétés d'une de ces lignes peuvent se transporter sur l'autre. Ainsi la fonction $ay + bx + c$ représente une droite sur un plan et un cercle sur une sphère, mais les coordonnées étant des fonctions transcendantes des tangentes d'arcs, les propriétés des droites sur un plan sont transférées sur les cercles de la sphère, conception de Gudermann qui a ramené la sphérométrie à la géométrie plane (*). Découvrir de semblables connexions à l'aide d'autres fonctions transcendantes pour chaque surface, est la besogne de l'avenir.

On peut aussi imaginer un système de coordonnées et réunir une suite de problèmes, comme applications. C'est

(*) *Voir* dans les *Nouvelles Annales* les travaux instructifs de M. Vannson.

ce qu'a exécuté avec talent le savant auteur de cet opuscule, titre modeste qui tient plus qu'il ne promet.

Soit AMB un arc de courbe plane; d'un point fixe O, considéré comme pôle, on abaisse une perpendiculaire OP sur la tangente à la courbe menée au point M; on prend pour *coordonnées* OP et le rayon vecteur OM; l'équation d'une ligne est une relation entre ces deux lignes, et l'auteur établit quinze relations fondamentales qui facilitent l'emploi du système. L'utilité de ce système ressortit surabondamment des applications suivantes, qui en montrent la fécondité et très-souvent l'élégance.

Soit OA un axe polaire (A est sur la courbe); OT une perpendiculaire à OM et terminée à la tangente en M, de sorte que T est sur la tangente. Prolongeons la perpendiculaire TO jusqu'à ce qu'elle rencontre en N la normale menée en M et qui est parallèle à OP.

Notations.

$$\mathrm{OP} = p, \quad \mathrm{MP} = q, \quad \mathrm{OM} = r,$$
$$\mathrm{POT} = \alpha, \quad \mathrm{TMO} = \beta, \quad \mathrm{MOA} = \omega,$$
$$\mathrm{MN} = \mathrm{N}, \quad \mathrm{MT} = \mathrm{T},$$

R = rayon de courbure en M,
s = l'arc AM,
A = aire du secteur AOM;

les accents désignent des dérivées par rapport à une variable quelconque, à moins qu'on ne la dénomme expressément. On a

$$\text{(I)} \qquad r^2 = p^2 + q^2,$$

$$\text{(II)} \qquad p = r\sin\beta, \quad q = r\cos\beta,$$

$$\text{(III)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{N} = \dfrac{r^2}{p}, & \mathrm{T} = \dfrac{r^2}{q}, \\ \mathrm{ON} = \dfrac{rq}{p}, & \mathrm{OT} = \dfrac{rp}{q}, \end{array} \right.$$

(IV) $\operatorname{tang}\beta = r\,\dfrac{\omega'}{r'}$,

(V) $\dfrac{r'}{\omega'} = \dfrac{dr}{d\omega} = \dfrac{rq}{p}$,

(VI) $\dfrac{dp}{d\alpha} = q$,

(VII) $p = \dfrac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\omega}\right)^2}}$,

(VIII) $R = \dfrac{rdr}{dp}$ (rayon de courbure),

(IX) $\dfrac{dq}{d\alpha} = R - p$,

(X) $s' = \omega'\,\dfrac{r^2}{p}$,

(XI) $s' = r'\,\dfrac{r}{q}$,

(XII) $\dfrac{ds}{d\alpha} = R$,

(XIII) $\dfrac{ds}{d\alpha} = p + \dfrac{aq}{d\alpha}$,

(XIV) $2A' = p\,\dfrac{rr'}{q} = ps'$,

(XV) $2\dfrac{dA}{d\alpha} = pR$.

Au moyen de ces formules, on passe des coordonnées polaires ordinaires aux nouvelles coordonnées et *vice versâ*.

I[er] Exemple. *Cercle* : $r^2 - 2dr\cos\omega + d^2 - a^2 = 0$; équation

$$\frac{dr}{d\omega}(r - d\cos\omega) = dr\sin\omega,$$

$$q\,(r - d\cos\omega) = pd\sin\omega,$$

$$(r^2 - p^2)(r - d\cos\omega)^2 = p^2 d^2 (1 - \cos^2\omega).$$

Eliminant $\cos\omega$, il vient pour équation en nouvelles coordonnées

$$2ap = r^2 + a^2 - d^2.$$

II^e Exemple. *Ellipse* : $2a$, $2b$ axes ; $2a =$ arc polaire ; $d =$ distance du centre à l'origine ; $e^2 = a^2 - b^2$;

$$r^2(e^2\cos^2\omega - a^2) + 2b^2dr\cos\omega + b^2(a^2 - d^2) = 0,$$

équation polaire.

On en déduit

$$e^2p^2(2adl - e^2r^2 - c^2m^2) = b^2(am^2 - dl)^2,$$

$$m^2 = d^2 - e^2, \quad c^2 = a^2 + b^2, \quad l^2 = e^2r^2 + m^2b^2.$$

III^e Exemple.

$$(c_1) \qquad 4a\cos^2\omega + r\cos\omega - 4a = 0, \quad \text{cissoïde},$$

$$(c_2) \qquad 2a\cos^2\omega + r\cos\omega + 2a = 0,$$

$$(c_3) \qquad (r^2 + a^2)\cos\omega - ar\omega = 0, \quad \text{strophoïde}$$

en nouvelles coordonnées sont exprimées par les équations

$$(c_1) \quad g^2p^4(3r^2 + 4g^2) + 2p^2r^4(2r^2 + 3g^2) - g^2r^6 = 0,$$

$$g = 4a,$$

$$(c_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} g^2p^4(5r^4 - 8g^2r^2 + 4g^4) \\ -2p^2r^4(2r^4 - 3r^2r^2 + 2g^4) + g^2r^8 = 0, \end{array} \right.$$

$$g = 2a,$$

$$(c_3) \qquad p^2(r^4 + 6a^2r^2 + a^4) = 4a^2r^4.$$

IV^e Exemple.

$$r^m = a^m\omega, \quad \text{d'où} \quad p^2(m^2r^{2m} + a^{2m}) = m^2r^{2m+2}.$$

$m = 1$, spirale d'Archimède ;
$m = 2$, spirale parabolique ;

$m = -1$, spirale hyperbolique;
$m = -2$, trombe;

$r = ae^{n\omega}$, $p = \dfrac{r}{\sqrt{1 + n^2}}$, spirale logarithmique.

$$(f) \quad \left\{ \begin{array}{c} (r - b)^m = a^m \cos n\omega, \\ p^2 [m^2 p^2 (r - b)^{2m-2} + n^2 a^{2m} - n^2 (r - b)^{2m}] \\ = m^2 r^4 (r - b)^{2m-2}; \end{array} \right.$$

$m = -1$, $n = 1$, conchoïde de Nicomède,
$m = n = 1$.

Remplaçant a et b par $2a$, $2b$, on obtient

$$4p^2 (br + a^2 - b^2) = r^4,$$

conchoïde circulaire.

Faisant

$$2b = a,$$

on a le limaçon de Pascal, et

$$b = a, \quad 4ap^2 = r^3, \quad \text{cardioïde.}$$

Faisant dans (f)

$b = 0$, $m = -1$, spirale de Cotes,
$b = 0$, $m \pm 1$ rhodoracées de Grandi,

$$r^{2m} - 2r^m (b^m - a^m \cos m\omega) + e^{2m} = 0,$$

$$(g)\ 4p^2 r^{2m-2} [b^m r^{2m} + r^m (a^{2m} - b^{2m} - e^{2m}) + b^m e^{2m}] = (r^{2m} - e^{2m})^2.$$

$m = 1$, ovales de Descartes ou *aplanétiques;*
Propriété fondamentale $r + nr_1 = h$;
r et r_1 distance d'un point à deux foyers;
n, h constantes.
$m = 1$, $e = 0$, conchoïde circulaire;
$m = 1$, $e = 0$, $b = a$, cardioïde;

$a = b$, $e = 0$, $n = \pm 1$, conique.

Posant

$$b = 0, \quad e^{2m} = a^{2m} - c^{2m},$$

il vient

$$(g_3) \qquad 2c^m p r^{m-1} = r^{2m} + c^{2m} - a^{2m},$$

m entier positif ; c'est le lieu d'un point dont le produit de ses distances aux sommets d'un polygone régulier de m côtés est constant. a est le rayon du cercle circonscrit au polygone, et l'origine est au centre de ce cercle ; le produit constant est c^m. Si m est négatif, l'équation est celle du lieu d'un point dont le produit des distances aux sommets d'un polygone régulier de m côtés est égal à la $m^{ième}$ puissance de la distance de ce point au centre du cercle circonscrit au polygone régulier : cassinienne à m foyers.

$m = 2$, ellipse cassinienne ;

Si $c = a$, $m = 1$, lemniscate de Bernoulli ;

$m = -1$ une droite ;

$m = -2$, l'hyperbole équilatère ;

$m = \frac{1}{2}$, cardioïde ;

$m = -\frac{1}{2}$, parabole ;

$m = 0$, spirale logarithmique ;

$m = \frac{1}{3}$, lieu du sommet d'une parabole touchant le cercle de rayon $4a$ et ayant pour origine le foyer, point fixe placé sur la circonférence ;

$m = -\frac{1}{3}$, caustique par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe ;

$m = \frac{2}{3}$, podaire du centre de la lemniscate.

Équation de l'épitrochoïde.

$$(h)\qquad \left\{\begin{aligned} &4mp^2[r^2 - a^2 + (m-1)c^2] \\ &= [(m-1)r^2 - a^2 + (m-1)c^2]^2. \end{aligned}\right.$$

a = rayon du cercle fixe;

b = rayon du cercle se mouvant extérieurement sur le cercle fixe;

$m = \frac{a+b}{b}$, $c^2 = d^2 - b^2$, distance du point décrivant M au centre du cercle mobile, l'origine est au centre du cercle fixe.

On parvient à cette équation directement, en considérant que N étant le point de contact des deux cercles correspondant à une position donnée du point M, MN est une normale à la courbe de cercle.

Changeant b en $-b$, on a l'équation de l'*hypotrochoïde,* cercle mobile intérieur.

Faisant

$$a = b, \quad m = 2,$$

on a une conchoïde circulaire dont l'origine est au centre du cercle.

Si $d = b$, on a les épicycloïdes.

Le chapitre IV traite des asymptotes, rayons de courbure, points d'inflexion, de rebroussement.

$$\text{Sous-tangente} = \frac{p}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{r^2}}};$$

si donc pour $r = \pm \infty$, p a une valeur finie réelle, il y a des branches infinies.

Dans les coniques

$$R = \frac{a^2 b^2}{p^3}, \text{ origine au centre.}$$

Dans l'hyperbole équilatère

$$R + N = 0.$$

Dans la strophoïde (c_3)

$$R = \frac{1}{4a^3}\frac{(r^4 + 6a^2r^2 + a^4)^{\frac{3}{2}}}{3r^2 + a^2}.$$

Ainsi cette ligne n'a ni points d'inflexion ni points de rebroussement.

Le chapitre V traite des développées, développantes, trajectoires.

Soient r, p, q, α (*voir* ci-dessus) les quantités relatives à un point d'une courbe donnée; r_1, p_1, q_1, α_1 les quantités correspondantes au point de la développée, on a (*voir* ci-dessus)

$$p_1 = q, \quad \alpha_1 - \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{dp_1}{d\alpha_1} = \frac{dq}{d\alpha}, \quad q_1 = R - p,$$

et, à l'aide des relations (I) et (VIII),

$$(1) \qquad p_1^2 = r^2 - p^2, \quad r_1^2 = r^2 + r^2\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - 2pr\frac{dr}{dp}.$$

Eliminant r et p, on obtient l'équation de la développée en r_1 et p_1;

Eliminant p_1, r_1, on obtient l'équation de la développante.

Exemples :

$$p = mr, \text{ spirale};$$

$$p_1 = mr_1, \text{ développée};$$

si l'on a

$$4mp^2 = (m+1)^2(r^2 - a^2), \text{ épicycloïde},$$

on obtient

$$4mp_1^2 = (m+1)^2\left[r_1^2 - \left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2 a^2\right],$$

développée, seconde épicycloide;

$$\frac{m-1}{m+1}a = a_1, \quad \frac{m-1}{m+1}b = b_1,$$

rayons du cercle fixe et du rayon mobile.

Si donc

$$a = \infty, \quad a_1 = a, \quad b_1 = b,$$

la développée est une cycloïde égale à la cycloïde développante; de même pour la spirale logarithmique.

Trajectoires.

Soit l'équation d'une ligne

$$\varphi(r_1, p_1) = 0;$$

faisons-la tourner dans son plan autour de son origine O et soit

$$\varphi(r, p) = 0$$

l'équation de la trajectoire qui coupe ces lignes sous un angle constant dont le sinus est égal à m. On a, d'après un théorème projectif,

$$p_1 = p\sqrt{1-m^2} + qm;$$

p et q ont même signification que ci-dessus; d'où

$$p_1^2 + p^2 = m^2 r^2 + 2pp_1\sqrt{1-m^2}.$$

Exemples :

$$p_1 = 0,$$

faisceau de droites passant par l'origine; la trajectoire est

$p = mr$, spirale logarithmique;

$$p_1 = r,$$

faisceau de cercles concentriques; trajectoire

$$p = r\sqrt{1-m^2},\ \text{spirale logarithmique;}$$

$$p_1^2 = \frac{r^4}{r^2+a^2},$$

faisceau de spirales d'Archimède; trajectoire

$$p^2(a^2+r^2) = r^2\left(ma + r\sqrt{1-m^2}\right),\ \text{spirale logarithmique.}$$

Si

$$m = 1,$$

on a

$$p_1^2 + p^2 = r^2$$

ou

$$p_1 = q.$$

$mr_1 + nr_2 = a$, ovales de Descartes;
r_1, r_2 rayons vecteurs allant à deux points fixes;
a paramètre variable.
L'équation de la trajectoire *orthogonale* est

$$\text{tang}^m \frac{1}{2}\omega_1 \,\text{tang}^n \frac{1}{2}\omega_2 = k$$

(pour ω *voir* ci-dessus).
Si

$$m = \pm n,$$

l'ovale devient une conique et la trajectoire une conique confocale.

Note. Nous venons de recevoir les Mémoires de Bordoni, ainsi que les Manuels anglais publiés par les Rév. Galbraith et Haughton; on en rendra compte.

Traité de Perspective-relief, par M. *Poudra*; in-8 de 224 pages; 1860.

La perspective-relief est une application nouvelle de la géométrie. Cette science s'adresse à tous les arts d'imitation. L'ouvrage a reçu de l'Académie des Sciences un accueil favorable; l'auteur a cru devoir en conséquence placer en titre, comme introduction, le Rapport instructif fait à cette Académie par deux de ses membres, MM. Poncelet et Chasles.

Les sculpteurs y trouveront des principes extrêmement simples pour la construction des bas-reliefs; tout est ramené à la construction de trois perspectives planes sur les faces du parallélipipède qui doit contenir le bas-relief.

Les géomètres y trouveront les formules qui servent à payer des coordonnées d'un point à ceux du point homologue.

On y expose ensuite les principes sur lesquels repose le tracé des décorations théatrales; ces constructions sont un résultat de l'alliance de la perspective plane à la perspective-relief. Ces principes n'avaient jamais été exposés et ne pouvaient l'être avant que cette dernière science fût connue. On en tire quelques applications aux dioramas et panoramas et aux décorations dans les fêtes publiques.

Comme application à l'architecture, on y expose une théorie des apparences donnant une appréciation des causes diverses des illusions de la vue; l'auteur en déduit quelques principes sur la décoration des monuments et sur la position à leur donner pour rendre leur apparence agréable à la vue; il appelle l'attention des architectes sur ce sujet, qui peut faire éviter des erreurs de construction toujours fort dispendieuses à réparer.

Des applications de la perspective-relief à la décoration des parcs et jardins terminent l'ouvrage (voir *Nouvelles Annales*, t. XVI, p. 107).

NOTE SUR UN OUVRAGE DE JEAN CEVA

(voir Nouvelles Annales, t. X, p. 184) ;

Par M. GENOCCHI.

Ayant passé quelques semaines à Plaisance, il y a plusieurs années, j'ai trouvé dans la bibliothèque communale de cette ville un exemplaire de l'ouvrage en question. Je transcris le frontispice: *De re numaria quoad fieri potuit geometrice tractata. Ad illustrissimos et excellentissimos Dominos Præsidem Quæstoresque hujus arciducalis Cæsari magistratus Mantuæ. Auctore Joanne Ceva. Mantuæ, apud Albertum Pazzanum. Impress. Arciduc., superioribus annuentibus. MDCCXI.* C'est un volume de 64 pages petit in-8°. Après la dédicace il y a un second titre qui explique mieux le but de l'ouvrage, savoir : *De monetis, quibus de causis valores immutentur, quidve curandum, ut publico indemnitati consulatur.* Ainsi le sujet est tout à fait du domaine de l'économie publique, et me semble traité d'une manière remarquable pour son temps. On y trouve des détails intéressants sur le taux des monnaies à Mantoue, à Milan, à Venise, sur les frais de fabrication, sur la valeur de l'or et de l'argent. Le rapport de l'argent à l'or était, dix ans auparavant, de 1 à 13, et s'était réduit alors à celui de 1 à $13\frac{1}{2}$. L'auteur veut bien que le souverain tire un profit de la fabrication des monnaies, *dum id honesti limites non transeat.* Il propose qu'on ferme l'entrée aux monnaies de cuivre étrangères, et que les autres monnaies des pays étrangers et surtout des pays limitrophes soient reçues seulement pour leur valeur intrinsèque, en exceptant toutefois les plus communes; il conseille de borner au nécessaire la fabrication des monnaies de cuivre, et qu'à l'exception de ces petites monnaies, sous, demi-sous, etc., dont la valeur normale sert à évaluer toutes les autres, on s'abstienne de donner aux monnaies un nom de leur valeur et exprimant une somme fixée de livres ou de sous. Il débute par des *définitions*, *pétitions*, *solutions*; puis viennent des *théorèmes*, des *corollaires*, des *problèmes* : il démontre, par exemple, que la valeur intrinsèque des monnaies est en raison composée directe de la population et inverse de la quantité d'argent monnayé, en prenant un terme moyen comme on démontre en géométrie que l'aire d'un rectangle est en raison composée de la base et de la hauteur.

NOTE SUR LE CENTRE SPONTANÉ DE ROTATION.

Ce point, qui occupe une si grande place dans la géométrie et dans la mécanique, a été signalé et dénommé par Jean Bernoulli :

Voco spontaneum, *quia a natura sponte quasi eligitur, pro diversitate circumstantiarum; ita ut non sit in potestate nostra illud ponere pro libitu* (*Opera omnia*, t. IV, p. 268).

On trouve ce passage dans le n° CLXXVII, qui porte pour titre *Propositiones variæ mechanico-dynamicæ*.

Ces propositions sont au nombre de cinquante-neuf et méritent encore de fixer l'attention aujourd'hui, elles renferment ce qu'on a écrit de plus clair, de plus philosophique sur le mouvement de rotation et sur la question connexe des forces vives; en général, tout ce qu'il a écrit

est utile à lire et à méditer. Ce n'est pas seulement un géomètre, c'est un savant et, qui plus est, un penseur: le charme de telles lectures rend fort ennuyeuses grand nombre d'autres lectures.

MOYEN HYDRODYNAMIQUE POUR TROUVER L'AIRE D'UN CERCLE ;

D'après MAUROLYCUS.

On construit : 1° un cylindre *creux*, ayant pour base le cercle et pour arête le diamètre de ce cercle ; 2° un cube *creux*, ayant pour côté ce même diamètre. On place les deux corps par leurs bases, sur un plan horizontal, bien nivelé; ensuite, après avoir rempli d'eau complétement le cylindre, on verse cette eau dans le cube, qui ne sera pas rempli complétement. Multipliant la hauteur qu'atteint l'eau dans le cube par le côté du cube, on a l'aire du cercle servant de base au cylindre (*). On trouve ce procédé dans la traduction d'Archimède, par Maurolycus, éditée par Cyllennius, Hesperïus. Palerme, 1685.

On y indique aussi le moyen de trouver le centre de gravité d'une surface plane, en la suspendant à un fil à deux points différents, moyen qui est aujourd'hui indiqué dans tous les Traités de Statique.

On lit ce qui précède dans l'ouvrage suivant :

Admirandi Archimedis monumenta omnia mathematica quæ extant, quorumque catalogum inversa pagina demontrat. Ex traditione doctissimi viri D. Francisci Maurolyci, nobilis Siculi abbatis Sanctæ Mariæ a Partu. Opus præclarissimun, nunc prius typis commissum, a ma-

(*) On n'insérera pas de démonstration.

theseos vero studiosis enixe desideratum, tandemque e fuligine temporum accurate excussum. Ad illustr. et religiosissimum virum Fr. Simonem Rondinelli, Sac. Hierosolymitanæ Religionis Equitem laudatiss. S. Joannis Baptistæ a Savigliana, nec non Poudade a et S. Philippi de Osmo Commendatorem digniss. Unius e Melitensibus triremibus olim strenuissimum ductorem, plurimarumque navium Turcicarum debellatorem gloriosum, in urbe feliciss. Panormo pro sua sac. relig. pluribus annis vigilantiss. Legatum, Receptorum ac Procuratorem generalem, et inclytæ Reaccensorum Academiæ Orbe in ipsa eruditissimum principem Panormi. Apud D. Cyllennium Hesperium, cum lic. sup. MDCXXXV. Sumpt. Antonini Giardinæ bibliopolæ Panorm. Fol. IV. 296 pages.

Maurolycus (François), né à Messine en 1494, d'une famille originaire grecque de Fanariote, est mort le 21 juillet 1575. Grand géomètre, il se mêlait, à ce qu'il paraît, d'astrologie. Don Juan l'ayant consulté, il lui prédit, à ce qu'on prétend, la victoire de Lépante.

« Les plus grands hommes demeurent toujours enfants par quelque endroit: Ceux mêmes qui ont reconnu l'illusion de ces présages en ont substitué encore d'autres plus ridicules à ceux qu'ils ont rejetés. Il semble que l'esprit humain ne puisse se défaire d'une folie, qu'en la remplaçant par une nouvelle, et que toute la perfection se trouve à changer seulement d'erreurs. » (La Motte, *OEuvres*, t. III, 1714, p. 26.)

En 1714 La Motte a écrit l'histoire de notre temps. Extravagances pour extravagances, aux charlatans *hypnomanciens*, nécroscopes, aux esprits frappeurs, médiums, etc, je préfère les horoscopes, les œuvres hermétiques, qui au moins ont été utiles aux sciences.

TRACÉ DES CARTES GÉOGRAPHIQUES.

DISCOURS PRONONCÉ LE 8 FÉVRIER 1856
A LA SÉANCE ANNUELLE DE L'UNIVERSITÉ IMPERIALE DE SAINT-PÉTERSBOURG,

PAR P. TCHÉBYCHEF (*).

Messieurs,

Les sciences mathématiques, dès la plus haute antiquité, ont attiré l'attention d'une manière spéciale; de nos jours elles ont acquis encore plus d'intérêt par leur influence sur les arts et l'industrie. Le rapprochement de la théorie avec la pratique donne de très-heureux résultats, et la pratique n'y gagne pas seule; les sciences elles-mêmes se développent sous son influence : elle fait découvrir des objets nouveaux de recherches ou des faces nouvelles dans les sujets connus depuis longtemps.

Malgré le haut degré de développement auquel sont parvenues les sciences mathématiques par les travaux des grands géomètres des trois derniers siècles, la pratique dévoile clairement leur imperfection sous beaucoup de rapports; elle pose des questions essentiellement neuves pour la science, et provoque ainsi la recherche de méthodes entièrement nouvelles. Si la théorie gagne beaucoup aux nouvelles applications d'une vieille méthode ou à ses nouveaux développements, elle doit encore acquérir davantage par la découverte de nouvelles méthodes, et dans ce cas la pratique est pour la science un guide sûr.

(*) Traduit du russe par M. Mention.

L'activité pratique de l'homme offre une extrême diversité, et pour en satisfaire toutes les exigences, le défaut de méthodes nombreuses et variées se fait sentir dans la science. Une importance particulière s'attache aux méthodes que nécessite la solution des aspects divers d'un même problème général, savoir : *Comment disposer de ressources données pour en retirer le plus grand profit possible?*

La solution des problèmes de ce genre constitue l'objet appelé *théorie des maximums et minimums.* D'un caractère purement pratique, ces problèmes ont une importance particulière pour la théorie; ils se rencontrent dans toutes les lois déterminant le mouvement de la matière, soit pondérable, soit impondérable. Il est impossible de ne pas reconnaître leur influence salutaire sur le développement des sciences mathématiques.

Jusqu'à l'invention de l'analyse infinitésimale, on ne possédait que des cas particuliers de la solution de pareils problèmes; mais ces solutions renfermaient déjà le germe de la nouvelle et si importante branche des mathématiques, connue sous le nom de *Calcul différentiel.* Pour montrer l'influence des questions *de maximum et de minimum* sur cette découverte, je rapporterai ici le passage du célèbre ouvrage de Newton, *Philosophiæ naturalis principia mathematica,* où il parle de l'origine d'une découverte, dont les applications et les résultats sont aujourd'hui innombrables.

« Il y a dix ans (en 1677), quand je correspondais avec le très-savant géomètre Leibnitz, je lui écrivis que j'avais une méthode pour la détermination des *maxima* et *minima*, pour mener les tangentes et résoudre d'autres questions analogues, et que cette méthode pouvait être employée avec la même facilité pour les équations tant irrationnelles que rationnelles. Je cachai alors ma méthode sous des lettres transposées, dont le sens était le suivant : « Une » équation renfermant un nombre quelconque de quanti- » tés fluentes, trouver la fluxion et réciproquement. » A quoi l'illustre Leibnitz répondit que, de son côté, il avait trouvé une méthode semblable, et il me la communiqua dans sa lettre même. Cette méthode se distinguait de la mienne seulement par la dénomination et la notation. » (Remarques sur la 7e proposition du 2e livre, édition de 1713.)

Mais la découverte du calcul différentiel et la solution de problèmes analogues à ceux qui y avaient conduit, n'épuisaient pas complétement le sujet; les recherches de Newton lui-même le manifestèrent : la question, qu'il résolut, de déterminer la forme d'un corps qui, se mouvant dans un fluide, rencontre la moindre résistance, offrit un problème de *maxima* et *minima*, essentiellement distinct de ceux pour lesquels on avait employé le calcul différentiel. La méthode générale pour résoudre les problèmes de ce genre, important surtout en mécanique analytique, conduisit encore à la découverte d'un nouveau calcul, connu sous le nom de *Calcul des variations*.

Malgré un tel développement des mathématiques, relatif à la théorie des *maximums* et *minimums*, il est aisé de remarquer que la pratique va plus loin, et exige la solution de problèmes sur les *maxima* et *minima*, encore d'un nouveau genre, essentiellement distinct de ceux qui ont recours aux calculs différentiel et des variations.

Comme exemple de semblables questions et de leur résolution, nous pouvons présenter nos recherches sur le *parallélogramme de Watt*, imprimées dans les *Mémoires des Savants étrangers* de notre Académie pour 1854. Par les résultats auxquels nous sommes parvenu, en examinant la méthode nécessaire pour déterminer la meilleure construction des mécanismes de cette espèce, on voit que dans ce cas les questions pratiques conduisent à beaucoup de résultats théoriques intéressants pour la science; que, des méthodes provoquées d'abord par la pratique, découle le moyen de résoudre de nouvelles questions théoriques, intéressantes même indépendamment de leur signification pratique (*).

Le tracé des cartes géographiques offre un autre exemple, particulièrement remarquable, de questions de ce genre. Dans l'état actuel de la théorie des cartes géogra-

---

(*) Ainsi nous trouvons ici, entre autres choses, la solution de la question suivante : « Une fonction entière

$$x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^m + \ldots + H$$

variant nécessairement avec x, quel sera le moindre degré de sa variabilité ? » Et ensuite : « Par quelles valeurs de A, B, C,..., H atteint-elle cette limite ? » La solution de ce problème fournit beaucoup d'intéressants résultats d'algèbre supérieure. Par exemple :

1°. Si l'on a l'équation

$$f(x) = x^n + B x^{n-1} + C x^{n-2} + \ldots + H = 0,$$

alors entre les limites h et $h \pm 4 \sqrt[n]{\frac{\pm f(h)}{2}}$, il se trouve au moins une racine d'une des equations

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0.$$

Le signe du radical se determine par celui de la fraction $\frac{-f(h)}{f'(h)}$. Ceci est d'une application importante dans la séparation des racines par la méthode de Fourier.

2°. Dans l'équation

$$x^{2n+1} + B x^{2n-1} + C x^{2n-3} + \ldots + H x \pm K = 0,$$

il y a toujours une racine entre $-2 \sqrt[2n+1]{\frac{K}{2}}$ et $\pm 2 \sqrt[2n+1]{\frac{K}{2}}$, d'où résulte cette propriete des équations :

Dans l'equation

$$x^{2n+1} + B x^{2n-1} + C x^{2n-3} + \ldots + H x \pm K = 0,$$

renfermant x à des puissances impaires, si K est compris entre -2 et $+2$, il se trouve, entre les mêmes limites, au moins une racine.

phiques, on peut enseigner en nombre infini diverses méthodes pour leur tracé, de manière que les éléments très-petits de la terre conservent dans la représentation leur véritable forme. Mais puisque, en outre, par la propriété de la terre d'être sphéroïdale, l'échelle de représentation de ses divers éléments varie nécessairement, les éléments égaux, pris à des endroits différents, seront représentés sur la carte avec des dimensions différentes. Plus les changements d'échelle seront sensibles, plus inexacte sera la carte géographique. Et puisque la grandeur de ces variations d'échelle, sur l'espace d'une même portion de surface, est plus ou moins forte, selon la méthode de projection, la question suivante se présente naturellement :

Pour quelle projection ces changements d'échelle seront-ils le plus petits possible ?

Dans une Note que j'ai lue à l'Académie des Sciences, dans sa séance du 18 janvier, j'ai montré que ce problème, traduit en analyse, se ramène à un problème spécial de *maximum* et *minimum*, essentiellement distinct de ceux qu'on résout dans les calculs différentiel et des variations. Ce problème ressemble à ceux qui ont fait l'objet du Mémoire précité sur le *parallélogramme de Watt*; mais il se rapporte à une classe plus élevée: là on cherchait quelques constantes, ici on demande de trouver deux fonctions inconnues, ce qui correspond à la détermination d'une quantité infinie de constantes. Cela établit entre ces problèmes une différence analogue à celle qui existe dans les problèmes du calcul différentiel et du calcul des variations. Sous le rapport théorique, cet objet est d'autant plus intéressant qu'il se ramène à la recherche d'une équation aux dérivées partielles, particulièrement remarquable, exprimant, entre autre choses, l'équilibre de chaleur dans les plaques infiniment minces. Ainsi, le problème sur les projections de cartes les plus avantageuses est liée à cette propriété remarquable de la chaleur : Dans l'équilibre de chaleur d'une plaque circulaire infiniment mince, la température du centre est la moyenne de la température de tous les points de la circonférence ; de même pour la sphère, la température du centre est la moyenne des températures à la surface.

La solution définitive de la projection la plus avantageuse pour les cartes est très-simple : la projection la plus avantageuse, pour représenter une partie quelconque de la surface terrestre, est celle dans laquelle aux limites de la représentation l'échelle conserve une même grandeur facile à déterminer, d'après la grandeur normale de l'échelle adoptée. En ce qui touche la détermination de la projection jouissant de cette propriété, elle se réduit au problème ordinaire dans lequel *il s'agit d'intégrer une équation aux dérivées partielles*, où la valeur de l'intégrale aux limites est donnée, limites entre lesquelles elle doit rester finie et continue.

Ainsi, pour la représentation de chaque contrée sur la carte, il n'y a qu'une projection la plus avantageuse. Elle se détermine par la position de la contrée par rapport à l'équateur et la forme de ses limites ; en outre, les parallèles et les méridiens représentent diverses lignes courbes, mais généralement approchantes du cercle et de la droite, si l'on projette une petite portion du globe terrestre. Ces lignes se construiront par points sans aucune difficulté.

Les cas où les parallèles et les méridiens se transforment complétement en cercles ou lignes droites, sont surtout remarquables ; cela facilite notablement le tracé des cartes de dimensions minimes. Lagrange, dans ses Mémoires *Sur la construction des cartes géographiques* (nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin, 1779) a déterminé toutes les projections où cela a lieu. En se fondant sur la propriété générale de la projection la plus avantageuse, il n'est pas difficile de montrer pour quels pays il conviendrait de s'en servir : les limites de ces pays se détermineront par les points pour lesquels l'échelle, dans ce genre de projection, conserve la même grandeur. Les limites déterminées de cette manière représentent généralement des courbes assez compliquées. Mais, à mesure que l'espace décrit diminue, elles se simplifient et convergent rapidement vers des ellipses, tellement qu'elles ne diffèrent guère de ces lignes, pour la représentation de contrées assez étendues, comme par exemple la Russie d'Europe. Ces ellipses ont des positions connues, déterminées; leur centre se trouve au centre de projection; l'un des axes est dans la direction du méridien. Le rapport des axes de ces ellipses se détermine au moyen de la position du centre, relative à l'équateur, et d'une certaine quantité que Lagrange appelle *exposant* de projection.

Réciproquement, pour la représentation de chaque partie du globe, assez petite et bornée par une ellipse semblable, on peut trouver la méthode de projection, suivant laquelle les parallèles et les méridiens seront des lignes circulaires ou droites, et qui donnera une représentation approchant de la réalité. Mais pour cela, d'après ce qui a été dit plus haut, le centre de projection et son exposant doivent être choisis d'une manière convenable, d'accord avec la position du pays et la forme des frontières (*). De là des méthodes particulières de projection,

---

(*) L'exposant de projection se détermine par la formule

$$\sqrt{1+\frac{n^2-1}{n^2+1}\cos^2 l},$$

où l est la latitude du centre, n le rapport de l'axe dirigé suivant le méridien à l'autre axe. (*Voyez* ma Note *Sur la construction des cartes géographiques,* lue à l'Académie le 18 janvier de la présente année.)

où l'on conserve la similitude des éléments infiniment petits, telles que : stéréographique, polaire et horizontale, projection de Gauss et de Mercator, qui se concluent toutes de la méthode générale par une hypothèse particulière sur le centre de projection ou l'exposant. Elles ne peuvent donner une représentation approchant de l'exactitude que dans des cas particuliers connus.

Ainsi, si l'ellipse ci-dessus mentionnée se transforme en cercle, l'exposant devient égal à l'unité, et la projection la plus avantageuse se réduit en général à la projection stéréographique *horizontale,* qui se transforme en *polaire,* quand le centre du cercle coïncide avec le pôle de la terre. A mesure que l'axe de l'ellipse, dirigé selon le méridien, diminue, la projection la plus avantageuse s'approche de celle de Gauss. Le centre s'approchant de l'équateur, cette projection devient celle de Mercator.

Il est clair, d'après cela, que, ayant en vue d'obtenir la meilleure représentation cartographique de pays différents, on ne peut se borner à un seul ou plusieurs des procédés particuliers, mais qu'il est nécessaire d'employer la méthode générale, en choisissant chaque fois convenablement et le centre de projection et la grandeur de l'exposant.

D'après ce qui a été dit plus haut, cela s'effectue aisément, par la projection d'une partie du globe dont les limites représentent une ellipse, avec un axe dirigé selon le méridien.

Mais la pratique n'offre jamais de cas aussi simples; les frontières des divers pays ont toujours la forme de courbes extrêmement irrégulières. Malgré cela, pour la meilleure représentation d'une contrée pas trop étendue, on peut déterminer la position du centre de projection et la grandeur de l'exposant, en comparant la forme des frontières à l'ellipse ou aux autres sections coniques.

Pour cela il suffit d'avoir une représentation approchée du pays, pour la projection duquel on cherche le centre et l'exposant les plus avantageux, et à cet effet on peut employer une carte tracée par quelque méthode que ce soit.

A proprement parler, ici trois hypothèses sont à faire, qui donnent le principe de trois solutions distinctes; mais, en les comparant entre elles, il ne sera pas difficile de trouver la plus avantageuse. 1° On peut regarder la contrée à projeter comme une portion d'espace bornée par une ellipse, avec un axe dirigé selon le méridien; pour les pays où la plus grande étendue en méridiens et parallèles se trouve presque opposée au centre, cela correspond toujours à la solution la plus avantageuse : ce cas se rencontre le plus dans la pratique. 2° On peut regarder la contrée à projeter comme une portion d'espace comprise entre deux ellipses, deux hyperboles ou deux paraboles semblablement disposées : cela peut donner la solution la plus avantageuse, seulement pour les pays recourbés en forme de faucille ou offrant une bande étroite inclinée sur les méridiens et les parallèles. 3° Enfin elle peut être comparée à un espace compris entre les branches de deux hyperboles opposées : cela correspond aux contrées dont les frontières sont sensiblement courbées en face du centre (*).

(*) Pour un espace qui, dans la projection stéréographique horizontale avec le rayon ± 1, est borné par l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

la limite des changements d'echelle (la différence entre la plus grande et la plus petite, divisée par l'échelle moyenne) s'exprime ainsi : $\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$; pour l'espace entre les deux ellipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

En nous arrêtant à la première hypothèse, qui comprend la plus grande partie des cas qu'on rencontre dans la pratique, nous remarquerons que, parmi la quantité d'ellipses qui peuvent être décrites autour de la contrée à projeter, la projection la plus avantageuse se déterminera par la plus petite, si pour la comparaison des diverses ellipses entre elles nous adoptons la longueur de leur diamètre moyen, également incliné sur les axes.

D'après la forme des frontières, il n'est pas difficile de reconnaître les points sur lesquels cette ellipse s'appuiera, et par eux de trouver les axes et le centre. Le centre de cette ellipse sera le lieu le plus avantageux du centre de projection; la position de ce centre et le rapport des axes de l'ellipse se détermineront au moyen de l'exposant le plus avantageux. Tout ceci se rapporte principalement à la représentation des contrées très-petites; mais pour les contrées étendues, d'après la méthode générale d'approxi-

---

cette limite égale $\frac{2(\lambda^2-1)a^2b^2}{a^2+b^2}$; entre les deux hyperboles

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda^2,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

elle égale $\frac{2(\lambda^2-1)a^2b^2}{\pm(a^2-b^2)}$; entre les deux paraboles

$$x^2=2py+\alpha,\quad x^2=2py+\alpha',$$

elle est égale à $2(\alpha-\alpha')$; enfin dans l'espace entre les branches des deux hyperboles opposées

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-\lambda^2,$$

la limite du changement d'échelle égale $\frac{2(\lambda^2+1)a^2b^2}{\pm(a^2-b^2)}$. Cela résulte des dernières équations de la note plus haut mentionnée et est exact jusqu'à $\tang^2\frac{u}{2}$ près, où u est la distance angulaire des points du pays projeté au point adopté pour centre de projection stéréographique.

mation successive, il est aisé de trouver les corrections et pour la position du centre et pour la grandeur de l'exposant. Ainsi s'obtiendra la méthode la plus avantageuse de tracé géographique d'un pays donné, dans lequel les parallèles et les méridiens restent des cercles.

On voit donc que le tracé des cartes géographiques appartient au nombre de ces questions pratiques, qui se résolvent diversement pour les diverses contrées; que la méthode de tracé, avantageuse pour la France, l'Allemagne ou l'Angleterre, peut être désavantageuse pour la Russie. En outre, par son étendue, la Russie offre des difficultés particulières dans la représentation cartographique; c'est pourquoi le choix de projection le plus en rapport avec son espace, la forme de ses frontières et sa position relativement à l'équateur, a une importance spéciale. Sans parler des cartes embrassant toutes les parties de la Russie, les cartes de ses diverses parties présentent des variations d'échelle très-sensibles. Ainsi, en projetant tout ce qui lui appartient du côté des monts Ourals par la méthode de Gauss, on admet des variations d'échelle de plus de $\frac{1}{20}$; ce qui, pour la mesure des surfaces, donne une différence de *un* mille carré sur *dix*, erreur très-sensible. Les erreurs deviennent moindres par la projection stéréographique horizontale, avec un centre convenablement choisi; mais la différence d'échelle atteint $\frac{1}{34}$, ce qui fournit pour l'évaluation des surfaces une erreur de *un* mille carré sur *dix-sept*. Ces erreurs ne sont pas assez petites pour être négligées; le moyen de les diminuer consiste à déterminer la projection correspondant le mieux à la forme et à la position du pays projeté.

En examinant sur la carte cette partie de la Russie, nous remarquons que dans le contour général de ses limites, elle est loin d'être une ellipse dont l'axe se dirigerait selon le méridien; et, dans ce cas, comme nous l'avons vu, on ne peut parvenir à la meilleure représentation, en conservant pour méridiens ou parallèles des cercles ou des lignes droites.

Simplifier ainsi la construction de sa carte, ce serait diminuer sensiblement le degré d'exactitude de la représentation. Pour atteindre la représentation la plus exacte, il est nécessaire de déterminer, d'après ce qui a été dit plus haut, la méthode de projection, en intégrant une certaine équation. Puisque l'intégration doit être effectuée sous des conditions dépendant de la forme des limites et que ces limites présentent toujours des courbes compliquées, il s'entend que l'intégration exacte est impossible. Mais la pratique ne l'exige pas. Il lui suffit de se borner à des variations d'échelle de dix-millièmes, et dans ce cas tout repose sur la détermination de certains coefficients qui, avec une précision suffisante pour la pratique, peuvent être calculés d'après la forme des limites, si recourbées qu'elles soient. Quant aux parallèles et aux méridiens, ils se construiront par points sans difficulté.

Passant à la méthode la plus simple de tracé des cartes, où les parallèles et les méridiens représentent des cercles ou des lignes droites, nous remarquons que les possessions de la Russie, du côté des monts Ourals, du Caucase et de la Géorgie, s'étendent plus du nord au sud que de l'est à l'ouest; dès lors on ne peut comparer cet espace à un cercle, encore moins à une ellipse dont l'axe dirigé du nord au sud serait très-petit, en comparaison de l'axe dirigé de l'est à l'ouest. Par conséquent, d'après ce qui a été dit ci-dessus, ni la projection de Gauss, ni la projection stéréographique ne correspondent à la forme du pays. Appliquant au cas actuel la méthode de détermination du centre et de l'exposant que nous avons montrée, nous remarquons que le centre de l'ellipse minimum qui, ayant un axe dirigé suivant le méridien, embrassant toutes les possessions ouraliennes de la

Russie, y compris le Caucase et la Géorgie, se trouve entre Jaroslaf et Ouglitch, à 57° de longitude et 57°,36′ de latitude; le rapport de ses axes est égal à $\frac{17}{10}$. Partant de cette ellipse, nous trouvons qu'à la projection la plus avantageuse correspond l'exposant 1,0788 (*). Cette grandeur ne diffère de 1, exposant de la projection stéréographique, que d'une quantité inférieure à un *dixième*. Mais une telle différence a une notable influence sur le degré d'exactitude de la représentation. Nous avons vu que la projection stéréographique, pour la position la plus avantageuse de son centre, sur l'espace de la portion de Russie examinée par nous, offre une variation d'échelle allant jusqu'à $\frac{1}{34}$. En adoptant la quantité trouvée 1,0788 pour l'exposant de projection et plaçant son centre entre Jaroslaf et Ouglitch (à 57° de longitude, et 57° 42′ 30″ de la latitude), nous avons obtenu une carte de cette partie de la Russie, où les changements d'échelle ne dépassent pas $\frac{1}{50}$, et c'est le plus haut degré de précision qu'on puisse atteindre, en conservant pour parallèles et méridiens des cercles et des lignes droites.

C'est ainsi, Messieurs, que la majeure partie des questions pratiques se ramène à des problèmes de *maximums* et *minimums*, entièrement nouveaux pour la science; et ce n'est que par la solution de ces problèmes que nous pouvons satisfaire aux exigences de la pratique qui cherche partout ce qu'il y a de meilleur, ce qu'il y a de plus avantageux.

(*) Par la formule de la remarque faite page 55, pour $l = 57° 36'$, $n = 1,7$, l'exposant est 1,0675. Calculant les corrections, nous trouvons qu'on doit augmenter cette quantite de 0,0113, et que la latitude du centre de projection est egale a $57° 36' + 6' 30'' = 57° 42' 30''$. Sa longitude reste égale à 57°.

BURGI (JOBST)

ET SENS *NÉPÉRIEN* DU MOT LOGARITHME (*);

D'APRÈS M. WILHEFM MATZKA,
Professeur à l'université de Prague.

En 1620 Burgi publia l'ouvrage suivant :

Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen, sambt gründlichen Unterricht, wie solche nützlich in allerley rechnungen zu gebrauchen und verstanden verden sol. Gedruckt in der alten stadt Prag, bei Paul Sessen, der loblichen Universitet buchdrucker. Im jahre 1620.

« Tables progressives arithmétiques et géométriques, avec une instruction solide pour les comprendre et s'en servir utilement dans toutes sortes de calculs. Imprimé dans l'antique ville de Prague, par Paul Sessen, imprimeur de la louable Université. Dans l'année 1620. »

Format petit in-4 de 7 feuilles et demie.

L'*Instruction solide* a été omise, il n'y a que les Tables : de sorte que le but véritable de ces Tables n'était pas bien connu. Cela a contribué à faire croire que Burgi a inventé les logarithmes longtemps avant Neper; à quoi il faut ajouter l'assertion de son beau-frère Bramer que nous avons citée (*Bulletin*, t. IV, p. 57), et surtout ce que dit Kepler avec tant d'assurance dans ses *Tabulæ Rudolphinæ;* fol. Ulmæ, 1617 :

Hoc inquam si expetis : ecce tibi apices logistici Justo Byrgio multis annis ante editionem neperianam, *viam præiverunt ad hos ipsissimos logarithmos. Etsi* homo

(*) *Journal de Grunert*, t. XV, p. 121; 1850 et t. XXXIV, p. 349; 1860.

cunctator et secretorum suorum custos, *fœtum in partu destituit*, *non ad usus publicos educavit.*

D'après cela, des doutes sur la priorité de l'invention étaient légitimes, et M. Matzka, dans son Mémoire de 1850, se prononce même en faveur de Burgi ; mais depuis la question a changé de face. M. le Dr Gieswald, professeur en premier du gymnase de Dantzig, a eu le bonheur de découvrir dans la Bibliothèque de cette ville le manuscrit de l'*Instruction solide* ci-dessus mentionnée, et l'a publié *in extenso* (p. 26-36) dans sa dissertation *Programme scolaire* (*) de 1856 :

Justus Byrg als mathematiker und dessen Einleitung in seine logarithmen.

« J. Byrg comme mathématicien et sur son Introduction à ses logarithmes. »

Dans la préface à cette *Instruction*, on lit :

Betrachtent derowegen die eigenschaft und correspondenz der 2 *progressen alz der arithmetischen und der geometrischen ; das was in der ist multipliciren, ist in jener nur addiern, und was in der ist dividiern in jener subtrahiren ; und was in der ist radicem quadratam extrahiren, in jener nur ist halbiren ; radicem cubicam extrahiren, nur in* 3 *dividirn ; radicem zensi in* 4 *diviern. sursolidam in* 5 *und alsofort in andern quantitaten.*

« Considérant à cet effet la propriété et la correspondance de deux progressions, telles que l'arithmétique et la géométrique, ce qui dans celle-ci est *multiplier* est dans celle-là seulement *additionner;* ce qui dans celle-ci est

(*) Il est d'usage en Allemagne que les directeurs ou supérieurs des colléges publient à la fin de l'année scolaire, non pas des discours qui le plus souvent impatientent les élèves et ennuient les *spectateurs*, qu'on croit *auditeurs*, mais des dissertations scientifiques, curieuses et instructives.

diviser est dans celle-là *soustraire*; ce qui dans celle-ci est *radicem quadratam extrahere*, est dans celle-là *dimidier*; *radicem cubicam extrahere*, seulement diviser par 3; radicem *zensi* par 4; *sursolidam* par 5, et ainsi de suite pour les autres quantités. »

Mais tout ce paragraphe de Burgi n'est que la traduction presque littérale d'un passage de l'arithmétique de Michael Stiffel (voir *Bulletin*, t. I, p. 71), dans son *Arithmetica integra* (1547, p. 249). Stiffel place l'une au-dessous de l'autre les deux progressions :

$$\begin{array}{ccccccccc} -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4,\ldots, \\ \frac{1}{8}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{2}, & 1, & 2, & 4, & 8, & 16,\ldots \end{array}$$

Et dit là-dessus :

Qualiaque facit progressio geometrica multiplicando et dividendo, *talia facit progressio arithmetica* addendo et subtrahendo.

Et Lib. 1, p. 35, il ajoute :

Additio in arithmeticis progressionibus respondet multiplicationi in geometricis. — Substractio in arithmeticis respondet in geometricis divisioni. — Divisio in arithmeticis progressionibus respondet extractionibus radicum in progressionibus geometricis, ut dimidiatio in arithmeticis respondet extractioni quadratæ in geometricis. — Triplatio in arithmeticis respondet multiplicationi cubicæ in geometricis. — Quintuplatio in arithmeticis respondet multiplicationi surdesolidæ in geometricis. Et sic de aliis in infinitum.

Burgi dit presque mot à mot la même chose et même la phrase finale.

L'Instruction *solide* débute ainsi :

Zu diesen Tabulen findet man Zweierley Zahlen :

eine mitt rothen Caractern, welche wie einem ieden leichtlich zu sehen, nichts anders dann ein arithmescher progress; die andre aber mit schwarzen nichts anders dann ein geometrischer progress ist : und auf das wir in diesem desto kurzer durchgehen, woll wir dorthin den arithmetischen progress die rothe et den geometrischen progress die schwarze zahl nennen, damit auch ein ieder die fundamenta dieser tabulen grundlicher fasse und dieselbige besser gebrauchen, so wollen wir in folgender begriff dieser 2 progressen fur augen stellen und dieselben mit etlichen exemplen erklaren.

$$\textit{Arithmetik}\ldots \quad \frac{0.1.2.3.\ 4.\ 5.\ .(\textit{roth})}{1.2.4.8.16.32\ldots(\textit{schwartz})}.$$

« Dans ces Tables, on trouve deux sortes de nombres : les uns en caractères *rouges*, qui, comme chacun le voit facilement, ne sont autres qu'une progression arithmétique; mais les autres *noirs* ne sont autres qu'une progression géométrique: mais afin d'abréger le trajet, nous appellerons nombre *rouge* la progression arithmétique et nombre *noir* la progression géométrique, et afin que chacun saisisse à fond les fondements de ces Tables et puisse mieux s'en servir, nous voulons mettre sous les yeux la propriété de ces progressions et les expliquer par quelques exemples :

$$\frac{0.1\ 2.3.\ 4.\ 5\ldots(\text{rouge})}{1\ 2.4.8.16.32\ldots(\text{noir})}. \text{ »}$$

Ainsi Burgi se sert des deux mêmes progressions que Stiffel, et quoiqu'il ne le nomme nulle part, il dit partout que d'autres arithméticiens, et entre autres un nommé Simon-Jacob Zons, ont traité des propriétés de ces deux séries. De là il résulte avec évidence qu'il n'a pas voulu passer pour l'inventeur de la relation entre les nombres rouges et noirs, de ce qu'on nomme aujourd'hui logarithme et *logarithmand* (*).

Dans la préface citée ci-dessus, il dit même expressément :

So habe ich nichts nutzlicheres erachtet, alsz diese Tabulen also zu continuern, *dass alle zahlen so vorfallen in derselben mogen gefunden werden, auch welcher* continuation *diese Tabulen erwachsen.*

« Ainsi je n'ai pensé rien de plus utile que de *continuer* ces Tables, de manière qu'on puisse y trouver tous les nombres qui se présentent ; cette *continuation* a donné naissance à ces Tables. »

Ainsi Burgi se donne seulement comme *continuateur* de Tables qui ont existé avant les siennes.

Burgi met dans le rang des nombres rouges toutes les dizaines

$$0.10.20.30\ldots 100.110.120$$

(terme général $10n$).

Au-dessous de zéro, il met le nombre noir 100000000 (huit zéros).

Au-dessous de 10, il met le nombre noir 100010000.

Ainsi en style moderne, le terme général de sa progression géométrique est $10^8.(1001)^n$.

Si l'on prend pour unité un dixième, la progression *rouge* se change en

$$0.1.2.3\ldots 10.11.12,$$

et en divisant chaque nombre *noir* par 10^8, la progression *noire* devient

$$1.1{,}001;\ 1{,}0002001\ldots(1{,}001)^n.$$

(*) Les Allemands emploient ce mot pour designer le nombre correspondant à un logarithme.

Stiffel avait adopté 2^n pour la progression géométrique, à quoi Burgi substitue $(1,0001)^n$.

Dans nos Tables, les nombres se suivent selon l'ordre naturel, et les logarithmes *approchés* sont placés vis-à-vis; dans les Tables de Burgi, ce sont les logarithmes qui sont disposés suivant l'ordre naturel 1, 2, 3,..., et les nombres *approchés* sont placés en regard. Ce sont des Tables dites *antilogarithmiques*, beaucoup moins commodes que les nôtres.

On peut conclure, de ce qui précède, que Stiffel le premier a vu la possibilité de remplacer les multiplications, etc., par des additions, à l'aide de deux progressions correspondantes (voir *Nouvelles Annales*, t. V, p. 496); que divers ont calculé, à cet effet, les termes de ces progressions en les réduisant en Tables, et que Burgi a continué et donné plus d'extension à ces Tables.

Il reste démontré que plusieurs, avant Néper, avaient en vue le même but que Néper, et que celui-ci l'a mieux atteint que ses prédecesseurs et d'une manière bien plus philosophique, et ses Tables sont tellement accommodées aux besoins des calculateurs, qu'elles sont entrées dans le domaine public, surtout avec la base 10 de Briggs (*).

Burgi ne se sert jamais de l'expression *logarithme*. On a donné à ce mot une origine qui se rattache à la théorie suivante qu'on doit à Képler (*Tabulæ Rudolphinæ*, cap. III, p. 11, col. 1). On dit qu'un rapport $\frac{a}{b}$ est contenu m fois dans un rapport $\frac{a'}{b'}$ lorsque le produit de m facteurs égaux à $\frac{a}{b}$ est égal à $\frac{a'}{b'}$. ce qu'on écrit $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a'}{b'}$.

(*) Les opérations infinitésimales s'exécutent avec la base népérienne e, il serait commode d'avoir des Tables trigonométriques avec cette base par là on éviterait les changements de systèmes

Supposons qu'on adopte un rapport fixe $\frac{a}{b}$ et qu'on y compare successivement tous les rapports possibles $\frac{a'}{b'}$; alors m est dit le logarithme de $\frac{a}{b}$; par exemple, prenons $\frac{a}{b}=\frac{10}{1}$, et $\frac{a'}{b'}=\frac{2}{1}$; alors $\left(\frac{10}{1}\right)^{0,30103}=\frac{2}{1}$ (à peu près), et 0,30103 est le logarithme de 2 : c'est la définition de Képler, qui ne diffère pas essentiellement, comme l'on voit, de la définition exponentielle d'Euler, aujourd'hui enseignée. De là on a déduit que logarithme est l'expression abrégée des mots grecs ἀριθμὸς τῶν λογῶν, *rationum numerus.* Mais M. Matzka objecte très-judicieusement que Néper a introduit le premier ce mot dans son ouvrage de 1614 (*Mirifici Logarithmorum, etc.*) et que sa théorie n'est nullement fondée sur l'idée d'un nombre de rapports, car cette théorie est purement *cinématique*, et, soit dit en passant, contient le premier germe des *fluxions*, lequel, entré dans la tête de Newton, en sort comme *calcul fluxionnel*; de même que la théorie des grandeurs *extrêmes* de Fermat contient le premier germe des différentiels, lequel, entré dans la tête de Leibnitz, en sort comme *calcul différentiel*. Il faut donc chercher chez Néper même le sens qu'il attachait au mot *logarithme*, dont d'ailleurs il n'indique nulle part *explicitement* la dérivation.

Or, dans l'Introduction à l'ouvrage ci-dessus cité, on lit :

Quum nihil sit... mathematicæ praxi tam molestum, quodque logistas (les calculateurs) *magis remoretur, ac retardet, quam magnorum numerorum multiplicationes, partitiones, quadratæque et cubicæ (scilicet radicis) extractiones, quæ, præter prolixitatis tædium, lubricis etiam erroribus plurimum sunt obnoxiæ, cœpi igitur anima revolvere, qua arte certa et expedita possem dicta impedita amoliri. Multis subinde in hunc finem per-*

pensis, nonnulla tandem inveni præclara compendia alibi fortasse tractanda (*) : *verum inter omnia nullum hoc utilius, quod una cum multiplicationibus, partitionibus, et radicum extractionibus arduis et prolixis, ipsos etiam numeros multiplicandos, dividendos, et in radices resolvendos*, ab opere rejicit *et eorum loco* alios substituit numeros, qui illorum munere fungantur *per solas additiones, subtractiones, bipartitiones et tripartitiones. Quod quidem arcanum cum... sit, quo communius eo melius: in publicum mathematicorum usum propalare libuit.*

Voilà le but bien clairement exposé : il consiste à substituer aux nombres données, d'autres dont les calculs sont plus faciles. En effet, dans son ouvrage publié en 1619 sous le titre : *Logarithmorum canonis constructio*, il appelle les nombres *numeri naturales* et leurs logarithmes *numeri artificiales*, nombre artificiel, nombre servant à calculer; or un nombre *de compte* se rend en grec par λογιστικός ἀριθμός; le mot *logistique* était très-usité du temps de Néper; Képler dans ses Tables Rudolphines appelle les nombres chiffrés des *apices logistici*. Ainsi logarithme signifie donc dans le sens de son inventeur *nombre artificiel*.

M. Matzka, qui donne cette ingénieuse et exacte dérivation, fonde là-dessus une manière très-élémentaire d'exposer les logarithmes dans les écoles primaires. Un produit ne change pas dans quelque ordre qu'on multiplie les facteurs; une somme ne change pas dans quelque ordre qu'on ajoute les nombres. Cette analogie suffit pour expliquer les logarithmes considérés comme nombres auxiliaires artificiels.

(*) Probablement sa *Rabdologie* (1617).

BIBLIOGRAPHIE.

MÉMOIRE SUR LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES SURFACES DU SECOND ORDRE; par M. *Ch. Méray*, docteur ès sciences; Rome, in-4 de 24 pages, 1860 (extrait des *Annali di Mat. pura ed applicata*, t. III, janv.-fév. 1860).

C'est une bonne étude sur la *Géométrie supérieure* de M. Chasles, et dont les théorèmes fondamentaux sont démontrés *géométriquement*. On n'y trouve qu'une seule équation, qui porte le n° 1; de quoi on aurait pu se dispenser, puisque cette équation est unique; c'est la méthode logique de M. Chasles, rendue moins *équationnelle*, s'il est permis de s'exprimer ainsi. Est-ce un avantage? Nous trouvons même que la classique et célèbre *Géométrie supérieure* est trop peu équationnelle. Des équations *écrites* valent mieux que des équations *parlées*, mais dont on se sert volontiers pour ressembler, à ce qu'on croit, à Euclide. Pure archéolâtrie. C'est faire rouiller une médaille fondue hier pour lui donner un vernis d'antiquité. La géométrie moderne se compose de *figures*, d'*équations* et de *déductions*, sans négliger les *inductions*, source de découvertes, et de chacune selon les besoins de la cause, comme l'on dit au barreau. Pourquoi les Grecs n'ont-ils pas fait usage d'équations? Même réponse que pour les chiffres : parce qu'ils ne les connaissaient pas. Apollonius ressuscité ne marcherait pas plus sur les traces d'Euclide que Platon ne serait platonicien, qu'Aristote ne serait aristotélicien; hommes de génie, ils apprendraient nos procédés et se placeraient bientôt au premier rang. Un courtisan disait au grand Frédéric que si César revenait, il trouverait *à qui parler*. « Si César revenait, répondit l'illustre capitaine, il étudierait nos moyens défensifs et offensifs, et puis nous battrait. » C'est vrai en toute chose.

DIOPHANTE.

Voici l'inscription *fictive* sur son tombeau, qu'on trouve dans l'*Anthologie grecque* (*) :

Οὗτος τὸν Διόφαντον ἔχει τάφος ἆ μέγα θαῦμα
  Καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο·λέγει.
Εκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην.
  Δωδεκάτη δ'επιθεὶς μῆλα πόρεν χλοάειν
Τῇ δ'αρ ἐπ' ἑϐδομάτη τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
  Εκ δέ γάμων πέμπτῳ παῖδ'ἐκενέυσεν ἔτει.
Αἴ αἴ τελύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρος
  Τοῦ δὲ καὶ ἡ κρυερὸς μέτρον ἕλων βιότου.
Πένθος δ'ἆυ πισύγεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς,
  Τῇ δὲ πόσου σοφίῃ τερμ' επόρησε βίου.

Traduction latine.

Hunc Diophantus habet tumulum qui tempora vitæ
  Illius, mira denotat arte tibi.
Egit sextantem juvenis; lanugine malas
  Vestire hinc cœpit parte duodecima.
Septante uxori post hæc sociatur, et anno
  Formosus quinto nascitur inde puer.
Semissem ætatis postquam attigit ille paternæ,
  Infelix subita morte peremptus obit.
Quatuor æstates genitor lugere superstes
  Cogitur, hinc annos illius assequere.

(*) BACHET, n° 19; BRUNCK, t. II, p. 423; t. III, p. 229; JACOBS, t. XIV, p 126; HEILBRONNER, p. 859.

Imitation versifiée.

Passant, sous ce tombeau repose Diophante,
Et quelques vers tracés par une main savante
Vont te faire connaître à quel âge il est mort :
Des jours assez nombreux que lui compta le sort,
Le sixième marqua le temps de son enfance;
Le douzième fut pris par son adolescence.
Des sept parts de sa vie une encor s'écoula,
Puis, s'étant marié, sa femme lui donna
Cinq ans après un fils, qui, du destin sévère,
Reçut de jours, hélas! deux fois moins que son père.
De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut :
Dis, si tu sais compter, à quel âge il mourut.

Solution.

Représente par x le nombre en question
Et, sans rien oublier, pose une équation
Où dans le premier membre on trouve le sixième,
Puis le douzième d'x, augmentés du septième.
Ajoutes-y neuf ans : le tout égalera
L'inconnue x. Transpose, ajoute..., et cætera.
Tu verras aisément, sans qu'on puisse en rabattre,
Que l'âge du bonhomme est bien QUATRE-VINGT-QUATRE.

H. EUTROPE.

Note du Rédacteur. La poésie est plus ancienne que la prose. Avant l'invention de l'écriture, l'histoire et la science se transmettaient par des moyens mnémoniques, et le rhythme est un de ces moyens. Les traités d'algèbre indiens, tel que le *Lilawati*, sont en vers. Que de milliers d'années écoulées avant la décomposition de la parole en mots et sons élémentaires et combinés, et d'autres milliers d'années avant la représentation graphique des ces sons!

GENEALOGIE DE VIÈTE (*).

§ I. Viète. — Famille originaire des environs de Fontenay, illustrée par l'un de ses membres, le fameux et savant mathématicien François Viète, créateur de l'algèbre.

Nous devons les éléments de cet article à l'obligeance de notre collègue et ami M. B. Fillon, qui lui-même a publié sur François Viète une Notice pleine d'intérêt.

I. — *Viette* (François), marchand à Foussays, mentionné dans un acte de 1528, est le premier de cette famille qui soit connu. Il fut père de : 1° Etienne, qui suit ; 2° Mathurin, rapporté § IV ; 3° Jean, qui eut pour enfants : Aliénor, dame de la Sablière, mariée à Louis Suppin, et le 23 janvier 1583 à Charles Clabat, écuyer, seigneur des Granges ; Anne, femme de Jean Cardinault, morte avant 1581 ; 4° Jeanne, épouse de Jean Dubois, seigneur de Saint-Cyr ; 5° Josèphe, épouse de François Beau, seigneur des Cambaudières.

II. — *Viète* (Etienne), qui le premier écrivit son nom avec un seul T, fut bachelier ès lois, procureur à Fontenay et notaire de la seigneurie du Busseau. Il eut de Marguerite Dupont, fille de François et de Françoise Brisson : 1° François, qui suit ; 2° Nicolas, rapporté § II ; 3° René, relaté § III ; 4° Claude, mariée le 17 juin 1568 à Cristophe Bonnet, mourut en 1573 ; 5° Françoise, épouse de Pierre Robert, seigneur du Vignault, notaire à Fontenay, morte vers 1597 ; 6° Jeanne, morte fille en 1596 ainsi que 7° Julie.

(*) Extrait du *Dictionnaire historique, biographique et généalogique des familles de l'ancien Poitou*, par M. Filleau de la Touche. Poitiers ; 1840-1854.

III. — *Viète* (François), né à Fontenay en 1540, fit son droit à Poitiers et le termina dès l'âge de vingt ans. Après avoir plaidé comme avocat pendant quelque temps dans sa ville natale jusqu'en 1567, il devint plus tard conseiller au parlement de Bretagne, où il figure le 6 avril 1574. On doit supposer qu'il dut ce poste à la faveur dont jouissait son cousin et condisciple le président Barnabé Brisson (*), près duquel il fut sans doute appelé à Paris, ce qui lui permit de faire des études sans lesquelles ses immenses découvertes eussent été sans base ni fondements. Obligé de quitter Rennes pour se réfugier à Beauvais-sur-Mer près de Françoise de Rohan, il y composa deux ouvrages. Nommé maître des requêtes ordinaires de l'hôtel du roi par le crédit de Brisson et du duc de Rohan (28 mars 1580), il se rend à Paris, mais il est très-promptement dépouillé de sa charge. On a lieu de croire qu'il courut quelques dangers, causés sans doute par une certaine tendance vers les idées de la Réforme. Retiré dans le bas Poitou, il se livra aux travaux les plus sérieux, et publia dans l'espace de neuf années presque tous les ouvrages qui ont consacré son immortalité. Lié aux Politiques, il suivit les membres du parlement attachés à cette faction qui siégèrent à Tours, et rentra avec Henri IV à Paris pour y occuper son siége dans le Conseil privé.

On apprendra avec plaisir la cause de cette insigne faveur. Pendant son séjour à Tours, on avait saisi plusieurs correspondances en chiffres enlevées aux Espagnols. Henri IV les soumit à Viète et lui en demanda le secret. En quatorze jours, le puissant cerveau du mathématicien possédait la langue espagnole, et le secret des correspondances était livré à son roi, qui s'en servit avec succès pour déconcerter les Espagnols; car, malgré le soin qu'ils

---

(*) Pendu à Paris en 1591 par les Seize. TM.

avaient de changer les figures, Viète, dans sa méthode étant parvenu à décupler des décuples, trouvait toujours la clef. En son absence, Dulys, son secrétaire, qu'il avait instruit dans cet art difficile, put servir de sûr interprète (*).

On raconte aussi de lui qu'un mathématicien hollandais (Adrianus Romanus) ayant proposé à tous les savants du monde la solution d'un problème, et ayant oublié, dans la liste des mathématiciens qu'il avait rédigée, d'en octroyer un à la France, Viète, mandé par le roi pour soutenir l'honneur du royaume, n'eut qu'à lire l'énoncé du problème pour en donner aussitôt plusieurs solutions. Lorsque Adrianus Romanus fut instruit du fait, il se rendit à Paris, de Paris à Fontenay, de Fontenay à la maison de campagne de Viète, toujours courant après le mathématicien et lui soumettant par écrit des propositions que Viète résolvait aussitôt. Enfin les deux savants finirent par se rencontrer, et le Hollandais charmé resta chez son hôte pendant six semaines.

Viète, au milieu des immenses travaux qu'exigeaient ses publications, ne négligeait aucun de ses devoirs de magistrat, et s'il a laissé quelques œuvres auxquelles manque la dernière main, c'est que les loisirs manquèrent à leur auteur. Il mourut au mois de février 1603.

Viète est incontestablement le créateur de l'algèbre; c'est à lui qu'on doit l'ingénieuse idée de représenter les quantités par des signes qui, ne pouvant se fondre par le calcul, présentent, au moyen de certaines notions conventionnelles, la trace des opérations effectuées pour arriver à la solution des questions proposées; et c'est cette idée qui a fait de cette science le plus puissant instrument du génie. Sans Viète, on peut le dire hautement, Descartes, Fermat, Newton, Pascal, Leibniz,

(*) *Voir* t. IX, p. 237; 1850.

qui ont éclipsé leur maître, seraient aujourd'hui bien moins connus que lui, ou plutôt sans Viète ils n'eussent pas existé. Nous pouvons donc le répéter, Viète est incontestablement l'un des plus grands hommes qu'ait enfantés le Poitou, et en songeant à tout ce que ce puissant génie a donné au monde, nous pouvons prononcer avec orgueil ce nom trop peu connu, même des héritiers de sa gloire modeste.

Pour les détails sur les ouvrages de Viète, *voir* sa Notice publiée par M. B. Fillon et Ritter, dont nous n'avons fait que présenter le résumé.

François laissa de Julienne Leclerc, son épouse, Suzanne, morte fille en janvier 1618.

§ II. — *Deuxième branche.*

III. — *Viète* (Nicolas), seigneur de la Motte de Mouzeuil, fils puîné d'Etienne et de Marguerite Dupont, rapportés II^e degré du § I^{er}, avocat, contrôleur ancien et conseiller en l'élection de Fontenay, mort en 1626, épousa : 1° Anne Quinefault, fille de Guillaume et de Penette Audayer, et 2° Marie Bauchier. Il eut du premier lit : 1° Nicolas, qui suit; 2° Marie, épouse d'Étienne Bran, seigneur de la Grande-Maison, conseiller en l'élection de Fontenay; 3° François, prêtre, prévôt de Notre-Dame de Fontenay, chanoine de Luçon; 4° Élisabeth, mariée le 22 mars 1595 à Jean de Saint-Micheau, conseiller en l'élection de Fontenay; 5° Jeanne, femme de Pierre Guillemin, écuyer, seigneur de Thouars; 6° Barnabé, écuyer, seigneur d'Aziré, assesseur au siége de la Rochelle, épousa Élisabeth Galais, dont il eut : 1° Élisabeth, mariée le 19 mars 1626 à Jean Faure, seigneur du Chiron, avocat à Fontenay; 2° Pierre, écuyer, échevin de la Rochelle, fut un des signataires de la capitulation de cette ville en 1628. Sa postérité existait encore en 1747 dans la personne d'Etienne-Auguste, écuyer, seigneur de la Livagerie, conseiller au présidial de la Rochelle. Il est à croire que MM. Prosper et Hyacinthe Viète de la Livagerie, officiers en retraite, qui habitent aujourd'hui la Rochelle, descendent de ce dernier; ce sont alors les seuls représentants de la famille de notre illustre compatriote.

IV. — *Viète* (Nicolas), écuyer, seigneur de la Grais-Pissote, fut maître des requêtes de la maison et couronne de France, substitut du procureur du roi, puis se fit prêtre. Il avait épousé, le 6 juin 1609, Jeanne Aléaume, fille de Jean, seigneur de la Chenulière, avocat du roi à Fontenay, et de Marie Regnouf, dont il eut: 1° Louis, écuyer, seigneur de Saint-Thomas; 2° Marie; 3° Jeanne, mariée: 1° le 7 novembre 1641 à Jean Baucher, écuyer, seigneur de l'Aulnay, et 2° le 8 février 1640 à François Bourgaing, écuyer, seigneur de la Grande-Basse; 4° Catherine, morte fille.

§ III. — *Troisième branche.*

III.— *Viète* (René), fils puîné d'Étienne et de Marguerite Dupont, relaté au IIe degré du § Ier, seigneur du Breuil, de Longesve, lieutenant général en l'élection de Fontenay-le-Comte, épousa Gabrielle de Saint-Micheau, fille de René, seigneur de la Guerinière, et de Catherine Chabot, et fut père de: 1° Gabrielle, mariée: 1° le 8 juin 1614 à Charles Masson, seigneur du Pin, et 2° à Charles Clavier; 2° Catherine, mariée le 11 février 1617 à Lancelot Pailler, seigneur de la Macardière, avocat du roi en l'élection de Fontenay-le-Comte; 3° René, né le 28 octobre 1593, mort jeune; 4° Marguerite, née le 12 août 1595, mariée le 13 mars 1620 à René de la Court, écuyer, seigneur du Fonteinan; 5° Claude, née le 7 novembre 1596, épousa le 19 septembre 1621 Jean Audouart, écuyer, seigneur de la Bigatière, avocat du roi au siége de Niort;

6° Anne, née le 18 février 1598, fut reçue le 19 avril 1623 religieuse du tiers-ordre de Saint-François à Fontenay; 7° Jeanne, née le 26 avril 1599. Peut-être est-ce la même que Jeanne Viète, épouse de Jean Gabriault, écuyer, conseiller au parlement de Rennes; 8° André, né le 23 septembre 1600, mort jeune; 9° Marie, née le 5 février 1602, épousa François Régnier, écuyer, seigneur de la Remaudière; 10° François, écuyer, seigneur du Breuil, maître des eaux et forêts en la sénéchaussée de Livrai.

§ IV. — *Quatrième branche.*

II. — *Viète* (Mathurin), fils aîné de François Viette, rapporté au I^er^ degré du § I^er^, seigneur de la Bretinière, de Faussays, mourut en février 1598, laissant de Nicole née Robin, son épouse : 1° Jean, qui suit; 2° François, rapporté § V; 3° Jeanne, femme de Nicolas Pigueriet, seigneur de la Martinière; 4° Jacques, seigneur de la Motte-d'Ardin, épousa, le 26 mai 1568, Marie Renaillon, fille de Pierre et d'Honorée Gaultran, dont il eut : Marie, femme de Jean Thubin, seigneur de Sérigué; Élisabeth, épouse de Jean Caut, seigneur de Maigre-Souris; Catherine, mariée le 22 août 1604 à Salomon Pougart, seigneur de Thies; Suzanne, mariée : 1° le 16 avril 1598 à Benjamin Gilbert, seigneur de la Dacotière; 2° en mai 1608 à Louis Lezin, seigneur du Maigue; elle est morte en septembre 1612; Judith, femme d'André Pauillan; Jeanne, mariée le 25 avril 1594 à Hélye Desavvre, seigneur de la Vergue; 5° Gilles, marchand à Foussays, mort en juillet 1563, et qui, de Marie Boureau, son épouse, laissa Gilles, émancipé le 11 juin 1579, époque à laquelle il était déjà l'époux de N. Jausseaume, fille de Jacques.

III. — *Viète* (Jean), époux de Jeanne Avord ou Auvard, fut père de : 1° Elisabeth; 2° Suzanne, élevée par son oncle Nicolas Viète, seigneur de la Motte de Maugeuil. Elle épousa, le 16 avril 1612, Paul Poyblon; 3° Jeanne; 4° Pierre.

§ V. — *Cinquième branche.*

III. — *Viète* (François), fils puîné de Mathurin et de Nicole, rapporté au II^e degré du § IV, seigneur de Saint-Nicolas, marchand à Morons et receveur des décimes du domaine de la Maillezais, épousa Catherine Jouslain et fut probablement père de : 1° Guy, mort garçon à Saint-Hilaire-de-la-Forêt, vers 1594; 2° Guillaume, notaire à Morons; 3° Loys, marchand à Niort; 4° René, qui suit :

IV. — *Viète* (René), demeurant à Saint-Hilaire-d'Ysernay, épousa Périnne Chanteau, dont Hilaire.

Armoiries. — François Viète, membre du conseil privé du roi, portait *d'argent au chevron d'azur accosté de six étoiles de...*, *accompagné en chef d'un soleil de... et en pointe d'un lys de jardin arrosé par une main dextre issant d'une nuée au côté senestre du chevron.*

Cette dernière figure fait allusion aux services rendus par le célèbre mathématicien au roi de Navarre à l'occasion de la découverte du chiffre des dépêches diplomatiques espagnoles. Quant au soleil et aux étoiles, ils rappellent le système planétaire connu au XVI^e siècle.

Note du Rédacteur. Nous avons inséré avec plaisir cet arbre généalogique. La noblesse ***réelle,*** celle du génie, est décernée de Dieu.

J'ai lu quelque part, l'endroit m'échappe, qu'à l'article de la mort, la famille a eu beaucoup de peine à faire accepter à Viète l'intervention d'un prêtre. A ce qu'il paraît, il était libre penseur ou seulement partisan du libre examen.

CALCUL INFINITÉSIMAL.

La teorica delle funzioni ellitiche, monografia del prof. *Henrico Betti* (*Annali di Matematica*. Marzo e aprile 1860, p. 85-128).

C'est l'exposition, à ma connaissance, la plus satisfaisante des fonctions monodromes, monogènes, synectiques, elliptiques à double période. La haute estime que nous professons pour le talent du célèbre analyste nous enhardit à dire que l'on découvre ici une qualité inattendue, la clarté; d'autant plus que nous considérons cette qualité comme très-précieuse, mais non pas comme la plus essentielle. La limpidité des petits ruisseaux, dit Voltaire, tient souvent à leur peu de profondeur. On arrange plus facilement une échoppe qu'un vaste magasin d'idées. Lorsque cette importante production sera terminée, nous en parlerons dans le corps du Journal. En attendant, nous en conseillons la fructueuse lecture aux géomètres familiers avec l'harmonieux idiome de l'antique Ausonie. Dans aucun temps, sous aucun régime, cette terre n'a été stérile en hommes de génie. Au XIII[e] siècle, l'apparition de Durante est un phénomène prodigieux, inexplicable.

O navis, referent in mare te novi
Fluctus?

L'habile géomètre, M. le capitaine Dewulf, traduit le Mémoire italien qui sera un utile commentaire au savant ouvrage de MM. Briot et Bouquet, aujourd'hui sur les rayons de toutes les bibliothèques mathématiques, et dont M. le professeur Garlin, qui vient de conquérir un rang honorable dans l'agrégation, nous a promis de rendre compte.

PENSÉE DE GERGONNE SUR LES EXAMENS EN 1814.

« Il n'est point du tout démontré que ce qu'il faut » faire pour briller dans les examens, du moins suivant » leur mode actuel, soit aussi ce qu'il y a de plus propre » à se rendre habile dans les sciences. » (*Journal* de Gergonne, t. V, p. 62.)

Il y a de cela un demi-siècle. Que dirait-il aujourd'hui de notre enseignement hypertrophique?

Supposons qu'une place de premier violon soit vacante à l'Opéra, et qu'on exige des candidats les connaissances suivantes : 1° la langue française; 2° la langue italienne; 3° l'histoire de la musique chez les peuples anciens et modernes; 4° la lecture et l'écriture de la musique; 5° les éléments du contre-point; 6° l'histoire de l'instrument; 7° la théorie des cordes vibrantes; 8° la théorie de la position du chevalet, de l'âme, des ouïes; 9° la théorie de la table de résonnance; 10° la théorie des sons normaux et harmoniques; 11° la théorie de l'archet, de ses extrémités et du milieu; 12° enfin l'exécution d'un adagio de Viotti.

Supposons, de plus, qu'on attache des coefficients numériques à ces diverses connaissances, et que leur somme soit décisive : il est possible qu'un ménétrier l'emporte sur un Paganini. *Rides : de te fabula narratur.*

LES TÉTRAGRAMMES MATHÉMATIQUES.

Jehovah s'écrit en hébreu avec quatre lettres; il est défendu à un israélite de prononcer ces lettres. Ainsi Jehovah, lisez *Adonaï.* Il en est de même maintenant pour certaines expressions qu'il n'est pas permis de prononcer dans l'enseignement secondaire.

Différentielle, prononcez *prime.*
Intégrale, prononcez *primitive.*
Couple, prononcez *rotation.*

Il y a même des mots sur lesquels il faut garder un silence respectueux; par exemple : *homothétie, rapport anharmonique*, *homographie*, *pôle*, *polaire*, *etc.*, et autres expressions qui, appartenant à la cabale mathématique, ne doivent pas être répandues chez le vulgaire. Je possède le fameux livre Razael : il y a des formules telles, qu'en les prononçant on peut incendier tel édifice qu'on veut. On comprend le danger qu'il y aurait de répandre de telles formules.

CROMWELL ET NEWTON COMPARÉS PAR VOLTAIRE.

Cromwell (Olivier), né en 1599, mort en 1658. Il n'y a guère d'exemples en Europe d'aucun homme qui, venu de si bas, se soit élevé si haut. Mais que lui fallait-il absolument avec tous ses grands grands talents? La fortune? il l'eut cette fortune. Mais fut-il heureux? il vécut pauvre et inquiet jusqu'à quarante-trois ans; il se baigna depuis dans le sang, passa sa vie dans le trouble et mourut avant le temps à cinquante-sept ans.

Newton (Isaac), né en 1642, mort en 1727. Que l'on compare à cette vie celle de Newton, qui a vécu quatre-vingt-quatre années, toujours tranquille, toujours honoré, toujours la lumière de tous les êtres pensants, voyant augmenter chaque jour sa renommée, sa réputation, sa fortune, sans avoir jamais ni soin, ni remords; et qu'on juge lequel a été le mieux partagé.

O curas hominum, o quantum est in rebus inane!

(PERS. *Sat.* I, v. 1.)

(*Dictionnaire philosophique*, article CROMWELL.)

PREMIER EXEMPLAIRE

de l'édition stéréotype des Tables de Logarithmes de Lalande, annoté par l'auteur.

Je possède le premier exemplaire que Lalande reçut en 1802.

Voici comment et de quelle manière ces Tables stéréotypées, qui sont devenues si répandues, ont été données au public.

Lalande (*), comme on le sait, notait minutieusement tout ce qui le concernait, et je joins ici ce qu'il a noté de sa plume de corbeau, dont il avait l'habitude de se servir, sur l'exemplaire dont il s'agit. Ce sont peut-être là des singularités de bibliomane; je suis loin d'en disconvenir. Il me semble cependant assez curieux de voir

(*) Jérome-François de La Lande, né à Bourg-en-Bresse, 11 juillet 1732, mort à Paris, 4 avril 1807.

que la publication de ces Tables, qui depuis ont été tant de fois réimprimées, a peut-être tenu à une misérable somme de 150 francs prêtée par Lalande à M. Didot, et que, sans cette facilité, l'imprimeur ne se serait peut-être pas décidé à fondre les caractères et à se risquer à imprimer, car les Tables à 6 décimales, publiées bien antérieurement et dès 1760 par les soins de La Caille et de Lalande, très-répandues à cette époque, et nombre de fois réimprimées avec la savante explication de l'abbé *Marie*, pouvaient être regardées comme suffisantes aux besoins des calculateurs.

Ces Tables allaient souvent jusqu'à 20 000; mais, selon Lalande, elles ne doivent pas outrepasser les 10 000, ce nombre lui paraissant suffisant, à tel point que de l'exemplaire de la dernière de ces Tables dont il se servait au moment de sa mort, et que je possède chargé de ses annotations, il en avait supprimé les 10 000.

Au surplus, le projet de Lalande a porté ses fruits, et par l'exiguïté de son format et la netteté des caractères de MM. Didot, cette publication a puissamment contribué à propager l'usage si précieux du calcul logarithmique. Ces mêmes Tables à 5 décimales, de même que celles des sinus, des tangentes, etc., ont été stéréotypées toujours sous le nom de Lalande, en plus d'une partie du monde et spécialement à Leipsig en 1833 par les soins de M. *H.-G. Köhler*, docteur en philosophie, qui y a joint une assez grande quantité de Tables spéciales, de même que celles des logarithmes de M. *Gauss*, dont vous parlez dans votre *Bulletin*. En un mot, cette édition me paraît constituer un véritable manuel de calcul logarithmique.

Notes de Lalande sur son exemplaire de 1802.

6 novembre 1799. — Projet arrêté avec Didot.

13 novembre. — Commencé l'explication.

7 février 1800. — 150 francs prêtés à Didot pour la fonte.

17 mars. — Première page d'essai. Il change le caractère.

24 août 1801. — Dernière épreuve.

Octobre. — On fait un tirage de 2 000.

23 octobre 1803. — Mention de l'ouvrage dans le *Journal des Débats*.

23 octobre. — Mention de l'ouvrage dans le *Moniteur* du 24, dans la *Clef du Cabinet* et dans l'*Histoire de l'Astronomie*, à l'*errata*.

Le 25 octobre. — Je promets 100 francs pour chaque faute.

Le 6 juin 1803, il y en avait déjà 2 500 de vendus.

En novembre 1804, je corrige l'explication.

FOURNERAT,
Juge honoraire du tribunal de la Seine,
à Ancy-le-Franc (Yonne).

BIBLIOGRAPHIE.

DISSERTATIO INAUGURALIS QUA SELECTA DE JURIBUS MATHEMATICORUM CAPITA in illustri Academia Basileensi pro obtinendo jurium doctoris gradu publicæ disquisitioni submittit *Joh. Fridericus Weidlerus*. A. R. G., MDCCXXVII, d. 24. mart. Basileæ. Litteris Brandmillerini. In-4°, 40 pages.

Cette instructive Thèse renferme six chapitres.

CAP. I. *De nominis mathematicorum, prouti in legibus occurrit significatione singulari et ejus causis.*

Au titre 18, lib. 9, du Digeste, on lit : *De maleficis et mathematicis et ceteris similibus*. On confond les mathématiciens avec les astrologues, les magiciens, etc.

Voir Tacite, *Hist.* lib. I, c. 22. Juvenal, *Sat.* XIV, v. 248.

On lit dans Aulu-Gelle, *N. A.* lib. I, c. 9 : *Vulgus, quos Chaldeos gentilitio vocabulo dicere oportet, mathematicos dicit.*

CAP. II. *De methodi mathematicæ usu in jurisprudentia.*

CAP. III. *De juribus arithmeticorum.*

Ces arithméticiens portaient divers noms.

1° *Calculatores ;* 2° *tabularii ;* 3° *discussores ;* 4° *ratiocinatores.*

Les calculateurs jouissaient de ce droit : le chef de la province (*provinciæ præses*) était tenu de juger leurs procès avant ceux des autres.

Discussores erant qui rationes publicas ab aliis tractatas sub examen vocabant.

Espèce de conseillers de la chambre des comptes ; ils exerçaient aussi un certain arbitrage, ainsi que les *ratiocinatores.*

Tous ces arithméticiens étaient exempts de la milice et de payer certains impôts.

On comprend l'importance qu'avaient les calculateurs avant l'introduction des chiffres arabes ; certains comptes exigeaient autant de jours qu'aujourd'hui d'heures.

CAP. IV. *De juribus geometrarum.*

On distingue : 1° *mensores ;* 2° *agrimensores ;* 3° *geodætæ ;* 4° *metatores.*

Il y avait des *mensores :* 1° *agrorum ;* 2° *frumentorum ;* 3° *militares.*

Mensuræ in jure romano sequentes commemorantur.

Digitus; tube d'un diamètre égal à l'épaisseur d'un doigt; en usage dans l'hydrométrie.

Pes, *cubitus*, *passus*, *decempeda*, *milliarium*.

Areæ agrorum : *Actus* = carré de 120 pieds de côté.

Jugerum = *actus duplicatus et ab eo quod erat junctum, nomen jugerius usurpavit.*

CAP. V. *Jure pictorum sive opticorum.*

CAP. VI. *Jure architectorum et mechanicorum.*

Severus et Celer étaient les mécaniciens de Néron. (Tacite, *Ann.* lib. XV, cap. 42.)

SUR LES DIVERSES DÉFINITIONS D'APRÈS LEIBNIZ.

Vers 1686, Leibniz écrivit en français (*) *un discours de métaphysique* qu'il envoya à l'illustre Arnauld pour en avoir son avis; il nie l'action du corps sur l'âme et des substances les unes sur les autres : ce sont des apparences, dont la réalité consiste dans l'intervention directe de Dieu; en d'autres termes, c'est son système de l'*harmonie préétablie*, développé depuis dans la Théodicée. Chaque substance exprime tout l'univers; c'est ce que Kant a nommé *das dingan sich selbst* (*ens per se*), et dont nous n'avons aucune connaissance; en résumé, ce discours est un développement scientifique de cette assertion de saint Jean, *vivimus in Deo*; cette vérité à laquelle nous devons la notion de certitude logique, de devoir moral, renferme en raccourci les bases des systèmes de Spinosa et de Malebranche, de Hegel. Leibniz croit aussi

---

(*) Parmi les géomètres du XVII^{e} siècle, Leibniz ecrit notre langue aussi bien que Descartes et n'est inferieur qu'à Pascal, ecrivain hors rang.

avoir expliqué la question épineuse de raccorder la prévision divine avec la liberté humaine, et il n'a fait qu'obscurcir la matière; le tout pour n'avoir pas, comme Kant, rangé le temps parmi les formes des aperceptions humaines, nullement applicable à Dieu; mais Leibniz nie la réalité de l'espace; en quoi il a un grand avantage sur Spinosa, qui fait de l'espace un attribut divin. Au reste, ces sujets sont étrangers à notre *Bulletin*, mais nous jugeons utile de rapporter le paragraphe XXIV de ce discours, qui a de l'intérêt pour les géomètres.

« 24. Pour mieux entendre la nature des idées, il faut toucher quelque chose de la variété des connoissances. Quand je puis reconnoître une chose parmi les autres, sans pouvoir dire en quoy consistent ces différences ou propriétés, la connoissance est *confuse*. C'est ainsi que nous connoissons quelquefois clairement, sans estre en doute en aucune façon, si un poëme ou bien un tableau est bien ou mal fait, parce qu'il y a un je ne sçais quoy qui nous satisfait ou qui nous choque (*) ; mais lorsque je puis expliquer les marques que j'ay, la connoissance s'appèle *distincte*. Et telle est la connoissance d'un essayeur, qui discerne le vray or du faux par le moyen de certaines épreuves ou marques qui sont la definition de l'or. Mais la connoissance *distincte* a des degrés, car ordinairement les notions qui entrent dans la definition, auraient besoin elles-mêmes de definition et ne sont connues que confusément (**). Mais lorsque tout ce qui entre dans une defini-

(*) Ces sortes de jugements, dont on ne peut toujours se rendre compte, constituent le bon goût. Les théories des osculations, des incommensurables, des quantités infinitésimales sont des connaissances confuses, mais certaines. Telle est aussi la notion sans laquelle aucune autre n'existe, du *moi*. Tm.

(**) La définition de la droite, *chemin le plus court*; mais chemin a besoin d'une definition. Tm.

tion ou connaissance distincte est connu distinctement, jusqu'aux notions primitives, j'appelle cette connoissance *adequate*. Et quand mon esprit comprend à la fois et distinctement tous les ingrediens primitifs d'une notion, il en a une connoissance *intuitive* (*) qui est bien rare, la plupart des connoissances humaines n'estant que confuses ou bien suppositives. Il est bon aussi de discerner les definitions nominales et les reelles. J'appelle *definition nominale*, lorsqu'on peut encore douter si la notion definie est possible, comme, par exemple, si je dis qu'une vis sans fin est une ligne solide (**) dont les parties sont congruentes ou peuvent inceder l'une sur l'autre; celuy qui ne connoist pas d'ailleurs ce que c'est qu'une vis sans fin, pourra douter si une telle ligne est possible, quoyque en effect ce soit une propriété reciproque (***) de la vis sans fin, car les autres lignes dont les parties sont congruentes (qui ne sont que la circonference du cercle et la ligne droite) sont planes, c'est-à-dire se peuvent decrire *in plano*. Cela fait voir que toute propriété reciproque peut servir à une definition nominale, mais lorsque la proprieté donne à connoistre la possibilité de la chose, elle fait la definition reelle, et tandis qu'on n'a qu'une definition nominale, on ne sauroit s'assurer des consequences qu'on en tire, car si elle cachoit quelque contradiction, ou impossibilité, ou en pourroit tirer des conclusions opposées. C'est pourquoy les verités ne depen-

---

(*) Par *intuitive*, on entend ordinairement ce qu'on conçoit de suite, sans réflexion, du moins sans que nous ayons la conscience de cette réflexion. Il suffit de regarder le sujet, *intueri*. TM.

(**) Ligne s'étendant dans l'espace, à double courbure.

(***) Ce mot *réciproque* n'a pas ici le sens habituel: il signifie ici deux choses qui s'obtiennent par la même voie. Deux droites parallèles sont partout également distantes; deux courbes parallèles sont une propriété réciproque, dans le sens de Leibniz.

dent pas des noms et ne sont point arbitraires comme quelques nouveaux philosophes ont cru (*). Au reste, il y a encore bien de la difference entre les especes de definitions reelles, car quand la possibilité ne se prouve que par experience comme dans la definition du vif argent dont on connoist la possibilité, parce qu'on sçait qu'un tel corps se trouve effectivement qui est un fluide extremement pesant, et neantmoins assé volatile, la definition est seulement reelle et pas davantage; mais si la preuve de la possibilité se fait *a priori*, la definition est encore *reelle* et *causale*, comme lorsqu'elle contient la generation possible de la chose; et quand elle pousse l'analyse a bout jusqu'aux notions primitives sans rien supposer, qui ait besoin de preuves *a priori* de sa possibilité, la definition est parfaite ou *essentielle.* » (Extrait du *Briefwechsel zwischen Leibniz, Arnauld, etc.;* édité par C.-L. Grotenfeld. Hanovre, 1846; p. 178.)

CHARLES (JACQUES) LE GÉOMÈTRE.

Né à Cluny (Saône-et-Loire) : on ignore l'année de sa naissance; décédé à Paris, hôtel Royal, place du Palais-Royal, et enterré le 22 août 1791 à Saint-Germain-l'Auxerrois. (Renseignement recueilli par M. Bienaymé, membre de l'Institut.)

Tous les biographes et bibliographes, sans exception, confondent le géomètre, membre de l'Académie, avec son homonyme le physicien, aéronaute, mort en 1823.

Une biographie de l'académicien est un *desideratum* à remplir par le Secrétaire perpétuel de l'Institut.

(*) Entre autres Pascal Tm.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME VI.)

Analyse algébrique.

Arithmologie.

Fonctions elliptiques.

Géométrie.

Mécanique.

Historique et Biographie.

Mélanges.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms des Collaborateurs sont précédés d'un astérisque.)

ERRATUM.

TOME III.

Page 92, ligne 9, *au lieu de* 80, *lisez* 380.

PARIS — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.