

J. LARROSE

Solution analytique de la question 502

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 85-87

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__85_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 502

(voir p. 44);

PAR M. J. LARROSE,
Élève du lycée Saint-Louis.

Lemme. Si l'on appelle a, b, c les trois côtés d'un triangle et (x', y') , (x'', y'') , (x''', y''') les coordonnées des sommets opposés, le centre du cercle inscrit a pour coordonnées

$$(A) \quad \begin{cases} x = \frac{ax' + bx'' + cx'''}{a + b + c}, \\ y = \frac{ay' + by'' + cy'''}{a + b + c}. \end{cases}$$

Je prends pour axes coordonnés les axes de l'ellipse. Soient (x', y') et (x'', y'') les coordonnées des points A et B où la corde passant par le point F rencontre l'ellipse.

Je joins A et B au second foyer F'. Le point de rencontre C des normales en A et B est le centre du triangle

ABF', dans lequel les côtés

$$F'A = a + \frac{cx'}{a} = \frac{a^2 + cx'}{a}, \quad \text{et} \quad F'B = a + \frac{cx''}{a} = \frac{a^2 + cx''}{a};$$

$$FA = \frac{a^2 - cx'}{a}, \quad FB = \frac{a^2 - cx''}{a}.$$

D'après les formules (A), l'ordonnée du point C donne

$$4a^2 y = a^2 (y' + y'') + c(x' y'' + y' x''),$$

car l'ordonnée de F' est nulle et le périmètre du triangle ABF' est $4a$.

Or l'on a

$$\frac{y'}{-y''} = \frac{AF}{BF} = \frac{a^2 - cx'}{a^2 - cx''};$$

d'où

$$a^2 (y' + y'') - c (y' x'' + x' y'') = 0;$$

ainsi

$$4a^2 y = 2a^2 (y' + y''),$$

$$y = \frac{y' + y''}{2}.$$

C. Q. F. D.

Cette démonstration est évidemment applicable à l'hyperbole et avec une facile modification à la parabole.

Note du Rédacteur. M. de Jolivette, élève de l'institution de Lasalle, part de l'équation *Comte*

$$x^2 + y^2 = (my + nx + p)^2,$$

et cherche directement les coordonnées de l'intersection des deux normales par les équations de ces lignes, ce qui entraîne un calcul qui exige des *multiplieurs* indéterminés que cet élève emploie adroitement.

M. L. Rabeau, élève du lycée de Poitiers, donne une solution analytique, analogue à celle de M. Larrose, et ajoute une solution géométrique pour la parabole seule-

ment, fondée sur ce que la normale bissecte l'angle formé par le rayon vecteur et le diamètre adjacent.

M. Charles Kessler, élève de la Flèche, établit aussi l'équation Comte, mais prend pour coordonnées du point d'intersection celles qui ont été consignées t. XVIII, p. 78.

M. Eugène Dupont, élève du lycée Louis-le-Grand, pose les deux équations

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2, \quad y = m(x - c);$$

les ordonnées y' , y'' des points A et B sont données par l'équation

$$y^2 (a^2 m^2 + b^2) + 2mb^2 cy - m^2 b^4 = 0,$$

$$y' + y'' = -\frac{mb^2 c}{a^2 m^2 + b^2}, \quad y' y'' = \frac{m^2 b^4}{a^2 m^2 + b^2}$$

et

$$mx' = y' + mc, \quad mx'' = y'' + mc.$$

De là les équations des deux normales en A et B sont

$$b^2 (y - y') (y' + mc) = a^2 y' (mx - y' - mc),$$

$$b^2 (y - y'') (y'' + mc) = a^2 y'' (mx - y'' - mc).$$

Éliminant x , il vient

$$mb^2 y = cy' y'' = -\frac{m^2 cb^4}{a^2 m^2 + b^2},$$

$$y = -\frac{mcb^2}{a^2 m^2 + b^2} = \frac{y' + y''}{2}.$$

C. Q. F. D.

MM. J. Bonnet, François de la Bruière (école de Sainte-Geneviève), H. Delorme (lycée Louis-le-Grand), Journeaux (de Liège), Desgranges ont envoyé des solutions identiques. M. Cuénoud (de Lausanne) fait observer que cette propriété est une conséquence immédiate de la question 433 (t. XVII, p. 285).