

A. DE JOLIVETTE

## **Solution de la question 493**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 19  
(1860), p. 5-8

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1860\\_1\\_19\\_\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__5_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# NOUVELLES ANNALES

DE

# MATHÉMATIQUES.

---



---

## SOLUTION DE LA QUESTION 493

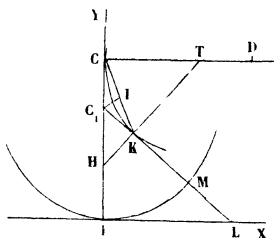
(voir t. XVIII, p 444),

PAR M. A. DE JOLIVETTE,  
Elevé de Speciales (institution de M. de Lassalle)

---

Soient  $P$  un point d'une conique,  $C$  le centre de courbure en  $P$ ,  $O$  le centre de la conique; par  $C$  on mène une parallèle à la tangente en  $P$ . Soit  $D$  le point où cette parallèle est rencontrée par le diamètre  $OP$ ; on a  $CD$  égal au tiers du rayon de courbure de la développée en  $C$ .

(ABEL TRANSON.)



Supposons la conique rapportée à deux axes de coordonnées rectangulaires; prenons pour axe des  $Y$  la normale en  $P$  et pour axe des  $X$  la tangente au même point :

( 6 )

l'équation de la courbe sera de la forme

$$ay'^2 + bxy' + x^2 + dy = 0;$$

l'équation de la normale en un point M ( $x'$ ,  $y'$ ) voisin du point P sera

$$y = \frac{2ay' + bx' + d}{by' + 2x'} \cdot x + y' = \frac{2ay' + bx' + d}{by' + 2x'} \cdot x'.$$

Le rayon de courbure R de la conique en P est la limite de l'ordonnée à l'origine de cette normale quand  $x'$  tendra vers zéro, d'où

$$\begin{aligned} R &= \lim \left( y' - \frac{2ay' + bx' + d}{by' + 2x'} \right) \\ &= \lim \left( y' - \frac{2ay' + bx' + d}{b \cdot \frac{y'}{x'} + 2} \right) = -\frac{d}{2}. \end{aligned}$$

Car  $\lim \frac{y'}{x'}$  étant le coefficient angulaire de la tangente en P est égale à zéro.

La développée sera tangente à l'axe des Y en C et à la normale  $MC_1$  en K; menons HK perpendiculaire à  $MC_1$  et prolongeons jusqu'à la rencontre en T avec C parallèle à l'axe des X.

Lorsque le point M se rapprochera indéfiniment de P, la longueur CT aura pour limite le rayon  $\rho$  de courbure de la développée en C.

Les triangles semblables TCH,  $C_1$  PL donnent

$$\frac{CT}{C_1 P} = \frac{CH}{PL},$$

d'où

$$\lim \frac{CT}{C_1 P} = \frac{\rho}{R} = \lim \frac{CH}{PL},$$

( 7 )

et

$$\rho = \frac{d}{2} \times \lim \frac{CH}{PL}$$

On obtiendra la valeur de  $\rho$  quand on connaîtra  $\left( \lim \frac{CH}{PL} \right)$ , dont nous allons nous occuper.

Observons d'abord que

$$\lim \frac{x'}{PL} = 1,$$

ce qui est facile à vérifier en tirant la valeur de PL de l'équation de la normale en M, puis encore que

$$\lim \frac{CH}{2CC_1} = 1.$$

En effet le rapport de  $\frac{CC_1}{C_1K}$  tend vers l'unité; car, si l'on joignait le point C au milieu I de la corde CK, cette droite serait le diamètre conjugué de la corde CK dans une parabole tangente aux droites CY, CM aux points C et K; donc l'angle  $C_1IC$  ne peut devenir nul en général, et les rapports  $\frac{CC_1}{CI}$ ,  $\frac{C_1K}{IK}$  de chacune des tangentes  $CC_1$ ,  $C_1K$  à la moitié de la corde CK tend vers l'unité, d'où résulte

$$1 = \lim \frac{\frac{CC_1}{CI}}{\frac{C_1K}{IK}} = \lim \frac{CC_1}{C_1K}$$

et

$$\lim \frac{CH}{2CC_1} = \frac{CC_1}{2CC_1} + \lim \frac{CH}{C_1K} \cdot \frac{C_1K}{2CC_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

De là on déduit encore

$$\lim \frac{CH}{PL} = \lim \frac{CH}{2CC_1} \times \frac{2CC_1}{x'} \times \frac{x'}{PI} = \lim \frac{2CC_1}{x'};$$

or

$$CC_1 = R - C_1 P = -\frac{d}{2} - y' + \frac{2ay' + bx' + d}{by' + 2x} \cdot x',$$

$$CC_1 = \frac{4(a-1)x'y' + 2bx'^2 - 2by'^2 - bdy'}{2(by' + 2x')}.$$

Pour avoir la limite, il faut diviser les deux termes par  $x'^2$ , et il vient

$$\lim \frac{2CC_1}{x'} = b - \frac{bd}{2} \lim \frac{y'}{x'^2};$$

$\lim \frac{y'}{x'^2}$  se déduit facilement de l'équation de la courbe.

On l'obtient en divisant ses deux membres par  $x'^2$  et passant à la limite

$$1 + d \cdot \lim \frac{y'}{x'^2} = 0,$$

d'où

$$d \times \lim \frac{y'}{x'^2} = -1.$$

Substituant

$$\lim \frac{2CC_1}{x'} = \frac{3b}{2}$$

et

$$\rho = -\frac{3bd}{4}.$$

Cherchons actuellement la partie CD de CT interceptée entre le diamètre PDO et l'axe des Y; l'équation de ce diamètre qui coupe en parties égales les cordes parallèles à l'axe des X est

$$by + 2x = 0.$$

CD est la valeur absolue de l'abscisse correspondante à  $y = -\frac{d}{2}$ , ou  $-\frac{bd}{4}$  qui est le tiers de  $(-\frac{3bd}{4} = \rho)$ , ce qui démontre le théorème énoncé.