NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Application des déterminants au contact des cercles et des sphères ; d'après M. C.-W. Bauer

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 440-448

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__440_1>

APPLICATION DES DÉTERMINANTS AU CONTACT DES CERCLES ET DES SPHÈRES;

D'APRÈS M. C.-W. BAUER (*),

Trois cercles.

1. Soit $OA_1A_2A_3$ un quadrilatère rectiligne plan.

(*) *Journal* de Schlomilch, t. V, p. 365; 1860.

Coordonnées, x_1, y_1 de A_1

x_2, y_2 de A_2

x_3, y_3 de A_3

o, o de O origine.

2.

$$(1)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Appliquant à ce déterminant le procédé connu, on a

$$(2)\qquad \Delta^2 = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 x_2 + y_1 y_2 & x_1 x_3 + y_1 y_3 \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 & x_2^2 + y_2^2 & x_2 x_3 + y_2 y_3 \\ x_1 x_3 + y_1 y_3 & x_2 x_3 + y_2 y_3 & x_3^2 + y_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Posons

$$a_m^2 = x_m^2 + y_m^2,\quad a_{mn}^2 = (x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2,$$
$$a_n^2 = x_n^2 + y_n^2,$$
$$2(x_m x_n + y_m y_n) = a_m^2 + a_n^2 - a_{mn}^2,$$

a_{mn} distance du point A_m à A_n.

Lorsque les coordonnées sont rectangulaires, les a_m expriment les distances OA_1, OA_2, OA_3, et les a_{mn} les distances A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1.

Ces équations donnent

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 2a_1^2 & a_1^2 + a_2^2 - a_{12}^2 & a_1^2 + a_3^2 - a_{13}^2 \\ a_1^2 + a_2^2 - a_{12}^2 & 2a_2^2 & a_2^2 + a_3^2 + a_{23}^2 \\ a_1^2 + a_3^2 - a_{13}^2 & a_1^2 + a_3^2 - a_{13}^2 & 2a_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Soient donnés trois cercles de rayons, r_1, r_2, r_3, et un quatrième cercle de rayon inconnu r qui les touche. Considérant le centre inconnu de ce cercle comme

origine, posons

$$a_1 = r + r_1, \quad a_2 = r + r_2, \quad a_3 = r + r_3,$$

$$r_m^2 + r_n^2 - a_{mn} = 2k_{mn}$$

(a_{mn} représente les distances respectives des centres).

A la gauche du déterminant écrivons la colonne o, o, o, formée de trois zéros et au-dessus la ligne horizontale

$$+1, \quad -2r(r + r_1), \quad -2r(r + r_2), \quad -2r(r + r_3),$$

on aura un nouveau déterminant de 16 termes, mais égal à Δ^2, puisqu'il se réduit à $1 \,.\, \Delta^2$, et par conséquent ce nouveau déterminant est aussi nul; on sait qu'un déterminant ne change pas de valeur absolue en ajoutant une ligne successivement terme à terme aux autres lignes; faisant cette opération avec la première ligne horizontale, on trouve le déterminant à 16 éléments:

$$\begin{vmatrix} +1 & -2r(r+r_1) & -2r(r+r_2) & -2r(r+r_3) \\ +1 & +2r_1(r+r_1) & +2rr_1+2k_{12} & +2rr_1+2k_{13} \\ +1 & +2rr_2+2k_{12} & +2r_2(r+r_2) & +2rr_2+2k_{23} \\ +1 & +2rr_3+2k_{13} & +2rr_3+2k_{23} & +2r_3(r+r_3) \end{vmatrix} = 0 \quad (A)$$

Écrivons à gauche une colonne de quatre zéros, et en tête la ligne horizontale

$$+1, 0, \quad +2r, \quad +2r, \quad +2r,$$

nous aurons un nouveau déterminant de 25 éléments, ayant même valeur que le précédent, à cause des quatre zéros; dans ce nouveau déterminant, multipliant cette première ligne par r, on a

$$r, 0, \quad +2r^2, \quad +2r^2, \quad +2r^2;$$

ajoutant cette ligne à la deuxième ligne, savoir à

$$0, 1, \quad -2r(r + r_1), \quad -2r(r + r_2), \quad -2r(r + r_3),$$

on obtient

$$+r,\quad +1,\quad -2rr_1,\quad -2rr_2,\quad -2rr_3.$$

Ce nouveau déterminant sera toujours nul.

Multipliant successivement la même première ligne par $-r_1$, $-r_2$, $-r_3$, et ajoutant respectivement à la troisième, quatrième, cinquième ligne de (A), on obtient

$$\begin{vmatrix} +1 & 0 & +2r & +2r & +2r \\ +r & +1 & -2rr_1 & -2rr^2 & -2rr_3 \\ -r_1 & +1 & +2r_1^2 & +2k_{12} & +2k_{13} \\ -r_2 & +1 & +2k_{12} & +2r_2^2 & +2k_{23} \\ -r_3 & +1 & +2k_{13} & +2k_{23} & +2r_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Mettant 1° la seconde colonne à la place de la première, et *vice versâ*; 2° divisant par r les termes de la première et seconde ligne; 3° par 2 les colonnes troisième, quatrième et cinquième, on obtient

$$\begin{vmatrix} 0 & +\frac{1}{r} & +1 & +1 & +1 \\ +\frac{1}{r} & +1 & -r_1 & -r_2 & -r_3 \\ +1 & -r_1 & +r_2^1 & +k_{12} & +k_{13} \\ +1 & -r_2 & +k_{12} & +r_2^2 & +k_{23} \\ +1 & -r_3 & +k_{23} & +k_{23} & +r_2^2 \end{vmatrix} = 0\ (*).$$

Effectuant ce déterminant, on obtient $\frac{1}{r}$ en fonction de r_1, r_2, r_3, ce qu'il fallait trouver. Le développement s'obtient facilement, les termes $\frac{1}{r}$, $+1$, $+1$, $+1$, donnent chacun 24 termes; ainsi tout au plus 96 termes; on voit qu'il suffit de calculer les termes provenant de $\frac{1}{r}$ et de $+1$.

(*) Je ne sache pas qu'on ait déjà trouvé r en fonction des trois autres rayons r_1, r_2, r_3.

En faisant varier les signes de r_1, r_2, r_3, on obtient les huit solutions que comporte le problème. r est donné par une équation du second degré; une des racines se rapporte à un mode d'attouchement, correspondant aux signes de r_1, r_2, r_3, et l'autre racine se rapporte au mode d'attouchement correspondant à des valeurs de r_1, r_2, r_3, avec des signes opposés; car on voit d'après le déterminant (A) que l'équation ne change pas en changeant simultanément les signes de r_1, r_2, r_3, et ceci, combiné avec la relation entre le coefficient du second terme de l'équation et la somme des racines, donne le théorème suivant, dû à M. G.-W Hearne.

Appelons rayon *réciproque* d'un cercle l'unité divisée par le rayon de ce cercle.

Soient :

$\frac{1}{R_3}$ le rayon réciproque du cercle qui est touché extérieurement par les trois cercles donnés;

$\frac{1}{R_0}$ le rayon réciproque du cercle qui est touché intérieurement par les trois cercles donnés;

$\sum \frac{1}{R_1}$ la somme des rayons réciproques de cercles qui sont touchés extérieurement par *un* des trois cercles donnés;

$\sum \frac{1}{R_2}$ la somme des rayons réciproques de cercles qui sont touchés extérieurement par deux des trois cercles donnés.

On a

$$\frac{1}{R_3} + \sum \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_0} + \sum \frac{1}{R_2}.$$

5. *Cas où les trois cercles donnés se touchent mutuellement*. Dans ce cas $a_{mn}^2 = (r_m + r_n)^2$; donc $k_{mn} = - r_m r_n$.

Divisant respectivement par r_1, r_2, r_3 les dernières lignes horizontales, et ensuite par r_1, r_2, r_3, respectivement les trois dernières lignes verticales (à droite), on a

$$\begin{vmatrix} 0 & +\frac{1}{r} & +\frac{1}{r_1} & +\frac{1}{r_2} & +\frac{1}{r_3} \\ +\frac{1}{r} & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +\frac{1}{r_1} & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +\frac{1}{r_2} & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +\frac{1}{r_3} & -1 & -1 & -1 & +1 \end{vmatrix} = 0.$$

Effectuant, on trouve

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}$$
$$= 2\left[\frac{1}{rr_1} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{rr_2} + \frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{rr_3} + \frac{1}{r_1 r_2}\right],$$

ou bien

$$\sum \frac{1}{r^2} = 2 \sum \frac{1}{rr_1},$$

formule qui peut ainsi servir à trouver trois cercles qui se touchent mutuellement et touchent un cercle *donné*.

Quatre sphères.

6. Soit le tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$; d'un point O on mène les droites OA_1, OA_2, OA_3, OA_4.

Coordonnées rectangulaires.

x_1, y_1, z_1 de A_1
x_2, y_2, z_2 de A_2
x_3, y_3, z_3 de A_3
x_4, y_4, z_4 de A_4
o, o, o de O origine.

Posons

$$OA_m = a_m,$$

$$a_m^2 = x_m^2 + y_m^2 + z_m^2;\quad a_n^2 = x_n^2 + y_n^2 + z_n^2;$$

$$a_{mn}^2 = (x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2;$$

d'où

$$(1)\qquad 2\,(x_m x_n + y_m y_n + z_m z_n) = a_m^2 + a_n^2 - a_{mn}^2.$$

On a

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 & x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3 & x_1 x_4 + y_1 y_4 + z_1 z_4 \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3 & x_2 x_3 + y_2 y_4 + z_2 z_4 \\ x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3 & x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3 & x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 x_4 + y_3 y_4 + z_3 z_4 \\ x_1 x_4 + y_1 y_4 + z_1 z_4 & x_2 x_4 + y_2 y_4 + z_2 z_4 & x_3 x_4 + y_3 y_4 + z_3 z_4 & x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 \end{vmatrix}$$

A l'aide des équations (1), on change ce déterminant en un autre dans lequel il n'entre que des a.

7. Lorsque les sphères des rayons r touchent les sphères des rayons r_1, r_2, r_3, r_4, on a

$$a_m = r + r_m;$$

posons

$$r_m^2 + r_n^2 - a_{mn}^2 = 2\,h_{mn},$$

et opérant comme ci-dessus, on trouve finalement

$$(\mathrm{B})\qquad \begin{vmatrix} 0 & +\frac{1}{r} & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +\frac{1}{r} & +1 & -r_1 & -r_2 & -r_3 & -r_4 \\ +1 & -r_1 & +r_1^2 & +k_1^2 & +h_{13} & +h_{14} \\ +1 & -r_2 & +h_{12} & +k_2^2 & +k_{23} & +h_{24} \\ +1 & -r_3 & +h_{13} & +k_{23} & +r_3^2 & +k_{34} \\ +1 & -r_4 & +h_{14} & +h_{24} & +k_{34} & +r_4^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Le développement, abstraction faite des réductions, donnerait 600 termes.

Les divers signes des rayons donnent les seize solutions que comporte le problème.

Cas où les quatre sphères données se touchent.

8. Raisonnant comme ci-dessus, on parvient au déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & +\frac{1}{r} & +\frac{1}{r_1} & +\frac{1}{r_2} & +\frac{1}{r_3} & +\frac{1}{r_4} \\ +\frac{1}{r} & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +\frac{1}{r_1} & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +\frac{1}{r_2} & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +\frac{1}{r_3} & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +\frac{1}{r_4} & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\sum \frac{1}{r^2} = 2 \sum \frac{1}{rr_1}.$$

9. M. Bauer donne les relations suivantes analogues à la relation donnée ci-dessus par M. Hearne.

Soient :

$\frac{1}{R_1}$ le rayon réciproque de la sphère qui est touchée extérieurement par les quatre sphères données;

$\frac{1}{R_0}$ le rayon réciproque de la sphère qui est touchée intérieurement par les quatre sphères données;

$\sum \frac{1}{R_1}$ la somme des rayons réciproques des sphères qui sont touchées extérieurement seulement par une des quatre sphères;

$\sum \frac{1}{R_2}$ la somme des rayons réciproques des sphères qui sont touchées extérieurement seulement par deux des quatre sphères.

On a

$$\frac{2}{R_4} - \frac{2}{R_0} = \sum \frac{1}{R_3} - \sum \frac{1}{R_1}.$$

Soient :

R_m le rayon de la sphère qui est touchée extérieurement par une des quatre sphères données,

Et R'_m le rayon de la sphère qui est touchée différemment par les quatre sphères, on a

$$\frac{1}{R_4 R_0} + \sum \frac{1}{R_2 R'_2} = \sum \frac{1}{R_3 R'_2}.$$

10. On a

$$x_m x_n + y_m y_n + z_m z_n = a_m a_n \cos(a_m a_n).$$

Au moyen de cette relation qui équivaut à six équations et du déterminant (B), on trouve une équation entre les cosinus des six angles *intérieurs* que donne un faisceau de quatre rayons, et les longueurs de ces rayons. C'est la relation donnée la première fois par Carnot (*) (*Géométrie de position*, 1803, p. 416); il fait voir comment on peut se servir de cette dernière relation pour trouver le rayon de la sphère qui touche quatre sphères, Il *présume* que l'équation sera du second degré et ajoute : « Le calcul étant fort long, quoique sans aucune difficulté, je me contente de l'indiquer. »

M. Mention a exécuté le calcul (*Nouvelles Annales*, t. XVIII, p. 438).

(*) Né à Nolay (Côte-d'Or) en 1753, mort en exil à Magdebourg en 1823.