

L. PAINVIN

**Équation des rapports anharmoniques
correspondant aux racines d'une
équation du quatrième degré**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 407-414

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__407_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EQUATION

des rapports anharmoniques correspondant aux racines d'une équation du quatrième degré;

PAR M. L. PAINVIN,
Professeur au lycée de Douai (*).

1. Désignons par x_1, x_2, x_3, x_4 , les quatre racines de l'équation

$$(1) \quad Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E = 0,$$

et par a, b, c, d , les points déterminés par les longueurs x_1, x_2, x_3, x_4 , portées sur une ligne droite, à partir d'une même origine; *points-racines*.

A ces quatre points correspondent six rapports anharmoniques, savoir :

$$r_1 = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}, \quad r_2 = \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb}, \quad r_3 = \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc},$$

et

$$\frac{1}{r_1}, \quad \frac{1}{r_2}, \quad \frac{1}{r_3}.$$

Si maintenant on pose

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = r_1 + \frac{1}{r_1}, \\ \rho_2 = r_2 + \frac{1}{r_2}, \\ \rho_3 = r_3 + \frac{1}{r_3}, \end{array} \right.$$

(*) Récemment nommé; remplaçant M. David, nommé professeur à la Faculté de Lille.

les quantités ρ_1, ρ_2, ρ_3 , seront les racines de l'équation

$$(3) \quad \rho^3 - M\rho^2 + N\rho - P = 0,$$

où

$$(4) \quad \begin{cases} M = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3, \\ N = \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3, \\ P = \rho_1\rho_2\rho_3. \end{cases}$$

Il s'agit actuellement de déterminer les coefficients de l'équation (3) en fonction des coefficients de l'équation (1). Le calcul direct est presque inabordable; je crois donc utile de développer quelques considérations qui m'ont conduit au résultat cherché.

2. Je rappellerai d'abord les relations qui existent entre les rapports r_1, r_2, r_3 :

$$(5) \quad \begin{cases} r_2 = \frac{1}{1 - r_1}, \\ r_3 = -\frac{1 - r_1}{r_1}; \end{cases}$$

d'où

$$r_1 r_2 r_3 = -1.$$

(*Géométrie supérieure*, p. 25.)

De plus, la valeur de r_1 est dans le cas actuel

$$(6) \quad r_1 = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)} = \frac{p}{q},$$

en posant

$$(7) \quad \begin{cases} p = (x_3 - x_1)(x_4 - x_2), \\ q = (x_3 - x_2)(x_4 - x_1). \end{cases}$$

On trouve alors, sans aucune difficulté, en ayant égard

De l'égalité 2° retranchons le double de l'égalité 1°, il vient

$$\Delta[2N - P - 4] = p^4 q^2 - 2p^3 q^3 + p^2 q^4 = p^2 q^2 (p - q)^2 = \Delta;$$

d'où

$$(10) \quad 2N - P = 5.$$

De l'égalité 2° multipliée par 3 retranchons l'égalité 1° multipliée par 5, il vient

$$\begin{aligned} \Delta[5N - 3P - 12] &= p^6 - 3p^5 q + 6p^4 q^2 - 7p^3 q^3 \\ &\quad + 6p^2 q^4 - 3p q^5 + q^6. \end{aligned}$$

Mais le second membre est le cube de $(p^2 - pq + q^2)$, on a donc

$$(11) \quad 5N - 3P - 12 = \frac{(p^2 - pq + q^2)^3}{\Delta}.$$

La détermination des coefficients M, N, P, se trouve ainsi ramenée au calcul des deux quantités Δ et $(p^2 - pq + q^2)$.

4. Or si l'on pose

$$(12) \quad \begin{cases} I = AE - 4BD + 3C^2, \\ J = ACE + 2BCD - AD^2 - EB^2 - C^3, \end{cases}$$

on a, d'après un théorème connu,

$$(13) \quad A^6 \cdot \Delta = 16^2 [I^3 - 27J^2].$$

On trouve d'ailleurs facilement que

$$(14) \quad A^2(p^2 - pq + q^2) = 12 \cdot I.$$

(411)

Les égalités (10) et (11) deviennent alors

$$\begin{aligned} 2N - P &= 5, \\ 5N - 3P &= 12 + \frac{27I^3}{4[I^3 - 27J^2]}; \end{aligned}$$

on en déduit

$$(15) \quad \begin{cases} N = -\frac{15I^3 + 12 \cdot 27 \cdot J^2}{4[I^3 - 27J^2]}, \\ P = -\frac{50I^3 + 4 \cdot 27 \cdot J^2}{4[I^3 - 27J^2]}. \end{cases}$$

En ayant égard à ces valeurs (15) et à la première des relations (9), l'équation (3), qui est l'équation cherchée, deviendra

$$(16) \quad \rho^3 - 3\rho^2 - 3 \frac{5I^3 + 4 \cdot 27 \cdot J^2}{4[I^3 - 27J^2]} \rho + \frac{50I^3 + 4 \cdot 27 \cdot J^2}{4[I^3 - 27J^2]} = 0.$$

Cette dernière équation peut aussi s'écrire sous la forme suivante, aussi simple qu'élégante :

$$(17) \quad I^3(\rho + 2) \left(\rho - \frac{5}{2} \right)^2 = 27J^2(\rho + 1)^3.$$

On voit ainsi que l'équation aux rapports anharmoniques des racines de l'équation (1) ne dépend que des invariants fondamentaux I et J de cette équation. Et, en outre, les racines de l'équation (16) ne dépendront que du rapport $\frac{I^3}{J^2}$.

Si ρ_1 est une racine de l'équation (16), en posant

$$\rho_1 + \frac{1}{\rho_1} = \rho_1,$$

on aura une équation du second degré qui déterminera un des rapports anharmoniques et son inverse.

5. La résolution de l'équation (16) ne saurait présenter de difficulté; je n'insisterai donc pas sur ce sujet, et je me contenterai d'ajouter les remarques suivantes :

1°. Si l'équation (1) a deux racines égales, c'est-à-dire si son discriminant est nul, ou, en d'autres termes, si l'on a

$$(18) \quad I^2 - 27J^2 = 0,$$

l'équation (16) se réduit à $\rho = 2$, et admet deux racines infinies; il y a donc deux rapports anharmoniques nuls et un égal à l'unité: résultat évident a priori.

2°. Si les quatre points correspondant aux racines de l'équation (1) forment un système harmonique, on devra avoir, par exemple, $r_1 = -1$, et par suite, $\rho_1 = -2$; l'équation (17) devra donc admettre la racine -2 , ce qui conduit à

$$(19) \quad J = 0,$$

La réciproque est facile à vérifier; on retrouve ainsi un théorème connu.

3°. Si l'on suppose $\rho_1 = 1$, c'est-à-dire

$$r_1 = r_2 = r_3,$$

l'équation (17) nous donne

$$(20) \quad I = 0;$$

la réciproque est également vraie. La condition pour que les trois rapports anharmoniques soient égaux est donc $I = 0$.

4°. L'équation (16) ne peut avoir une racine double que lorsque

$$I - 27J^2 = 0,$$

ou bien lorsque

$$J = 0.$$

Ces deux hypothèses nous conduisent aux deux premiers cas déjà examinés.

6. Considérons deux équations du quatrième degré :

$$(21) \quad Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E = 0,$$

$$(22) \quad A'x^4 + 4B'x^3 + 6C'x^2 + 4D'x + E' = 0;$$

les équations aux rapports anharmoniques des racines de ces équations seront respectivement, en adoptant la forme (17),

$$(23) \quad I^3(\rho + 2) \left(\rho - \frac{5}{2} \right)^2 = 27J^2(\rho + 1)^3,$$

$$(24) \quad I'^3(\rho + 2) \left(\rho - \frac{5}{2} \right)^2 = 27J'^2(\rho + 1)^3;$$

I' et J' désignant les invariants de la seconde équation (22).

Pour que les équations (23) et (24) aient une racine commune, et alors les trois seront communes, il faut et il suffit que

$$\frac{I^3}{J^2} = \frac{I'^3}{J'^2};$$

ceci résulte immédiatement de la forme même des équations (23) et (24).

En général, si l'on a une suite d'équations du quatrième degré, dont les invariants fondamentaux sont respectivement I et J pour la première, I' et J' pour la seconde, I'' et J'' pour la troisième, etc..., les rapports anharmoniques correspondant aux racines de ces diver-

(414)

ses équations seront les mêmes, si l'on a

$$\frac{I^3}{J^2} = \frac{I'^3}{J'^3} = \frac{I''^3}{J''^2} = \dots;$$

ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

La proposition que je viens d'énoncer peut être d'un grand secours dans des questions d'homographie.