

J. DE VIRIEU

Solution de la question 500

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 389-396

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__389_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 500

(voir p. 43);

PAR J. DE VIRIEU,
Régent à Saumur.

1. La seconde des équations proposées

$$x^5 - 10x^2 - 10x - 6 = 0$$

se déduit de la troisième

$$x^5 - 50x^2 - 56x - \frac{6^2}{\alpha} - \frac{\alpha^3}{6} = 0,$$

en posant $\alpha = 2$, $6 = 2$.

Cette dernière n'est qu'un cas particulier d'une équation de degré quelconque, mais d'une certaine forme.

2. M et N étant deux quantités réelles, proposons-nous de former l'équation dont les racines se déduiraient de l'expression

$$\rho M + \rho^2 N,$$

en y remplaçant ρ par chacune des racines de l'équation

$$u^p - 1 = 0;$$

soit

$$(1) \quad x^p + A_1 x^{p-1} + \dots + A_h x^{p-h} + \dots + A_p = 0$$

l'équation cherchée.

Désignons par S_h , h étant un nombre entier absolu qui peut être nul, la somme des puissances d'exposant h des racines de l'équation (1); par S'_h la même somme pour les racines de l'équation

$$u^p - 1 = 0,$$

S_h se déduira du développement de $(\rho M + \rho^2 N)^h$ en y remplaçant

$$\rho^h, \rho^{h+1}, \dots, \rho^{h+i}, \dots, \rho^{2h}, \text{ par } S'_h, S'_{h+1}, \dots, S'_{h+i}, \dots, S'_{2h},$$

et l'on a

$$(2) \quad S_h = \sum_{i=h}^{\iota=0} \left[\frac{h^i}{i!(h-i)!} M^{h-i} N^i S'_{h+i} \right];$$

mais S'_{p+i} est égal à p ou à zéro, suivant que $h+i$ est ou non un multiple de p , zéro étant regardé comme un multiple de tout nombre; il en résulte

(390)

$$p = \begin{cases} = 2q, & q \leq h \leq q, \\ \text{tous les termes du deuxième} \\ \text{membre de l'équation (2)} \\ \text{sont nuls} \\ = 2q + 1, & 1 \leq h \leq q \end{cases}$$

$$p = \begin{cases} = 2q, & q \leq h \leq 2q - 1 \dots \dots \frac{h}{(2q-h)!(2h-2q)!} M^{2h-2q} N^{2q-h} \cdot S'_{2q}, \\ \text{tous les termes du deuxième} \\ \text{membre de l'équation (2)} & \text{savoir :} \\ \text{sont nuls hors un} \\ = 2q + 1, & q + 1 \leq h \leq 2q \dots \dots \frac{h'}{(2q+1-h)!(2h-2q-1)!} M^{2h-2q-1} N^{2q+1-h} \cdot S'_{2q+1}. \end{cases}$$

Enfin si $h=p$, tous les termes du deuxième membre se détruisent, excepté le premier et le dernier qui sont

$$M^p S'_p, \quad N^p S'_{2p}.$$

3. On en déduit :

$$\begin{cases}
 \mu = 2q \left\{ \begin{array}{l}
 S_1 = S_2 = \dots = S_{q-1} = 0, \\
 0 \leq r \leq q-1, \quad S_{q+r} = \frac{(q+r)!}{(q-r)!(2r)!} 2q M^{2q} N^{q-r}, \\
 S_{2q} = 2q (M^{2q} + N^{2q});
 \end{array} \right. \\
 \\
 \mu = 2q + 1 \left\{ \begin{array}{l}
 S_1 = S_2 = \dots = S_q = 0, \\
 1 \leq r \leq q, \quad S_{q+r} = \frac{(q+r)!}{(q+1-r)!(2r-1)!} (2q+1) M^{2r-1} N^{q+1-r}, \\
 S_{2q+1} = (2q+1) (M^{2q+1} + N^{2q+1}).
 \end{array} \right.
 \end{cases}$$

4. Substituant dans les équations connues :

$$\begin{aligned}
 S_1 + A_1 &= 0, \\
 S_2 + A_1 S_1 + 2A_2 &= 0, \\
 &\dots\dots\dots \\
 S_p + A_1 S_{p-1} + \dots + A_{p-1} S_1 + p A_p &= 0,
 \end{aligned}$$

on a

$$\begin{cases}
 \mu = 2q \left\{ \begin{array}{l}
 A_0 = A_1 = \dots = A_{q-1} = 0, \\
 0 \leq r \leq q-1, \quad \frac{(q+r)!}{(q-r)!(2r)!} 2q M^{2r} N^{q-r} + (q+r) A_{q+r} = 0, \\
 2q (M^{2q} + N^{2q}) + 2q N^q A_q + 2q A_{2q} = 0;
 \end{array} \right. \\
 \\
 \mu = 2q + 1 \left\{ \begin{array}{l}
 A_1 = A_2 = \dots = A_q = 0, \\
 1 \leq r \leq q, \quad \frac{(q+r)!}{(q+1-r)!(2r-1)!} (2q+1) M^{2r-1} N^{q+1-r} + (q+r) A_{q+r} = 0, \\
 (2q+1) (M^{2q+1} + N^{2q+1}) + (2q+1) A_{2q+1} = 0.
 \end{array} \right.
 \end{cases}$$

5. On a enfin

$$\begin{aligned}
 p=2q \left\{ \begin{array}{l} A_1 = A_2 = \dots + A_{q-1} = 0, \\ 0 \leq r \leq q-1, \quad A_{q+r} = -2q \frac{(q+r-1)!}{(q-r)!(2r)!} M^{2r} N^{q-r}, \\ A_{2q} = - (M^{2q} - N^{2q}); \end{array} \right. \\
 p=2q+1 \left\{ \begin{array}{l} A_1 = A_2 = \dots = A_q = 0, \\ 1 \leq r \leq q, \quad A_{q+r} = - (2q+1) \frac{(q+r-1)!}{(q+1-r)!(2r-1)!} M^{2r-1} N^{q+1-r}, \\ A_{2q+1} = - (M^{2q+1} + N^{2q+1}). \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

6. En substituant dans l'équation (1) on a

$$\begin{aligned}
 (3) \quad x^{2q} - 2q \sum_{r=0}^{r=q-1} \left[\frac{(q+r-1)!}{(q-r)!(2r)!} M^{2r} N^{q-r} x^{q-r} \right] - (M^{2q} - N^{2q}) = 0, \\
 (4) \left\{ \begin{array}{l} x^{2q+1} - (2q+1) \sum_{r=1}^{r=q} \left[\frac{(q+r-1)!}{(q+1-r)!(2r-1)!} M^{2r-1} N^{q+1-r} x^{q+1-r} \right] \\ - (M^{2q+1} + N^{2q+1}) = 0. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

7. Convenons que, A étant une quantité positive, l'expression $\overline{A^{\frac{1}{p}}}$ désigne la quantité positive qui, élevée à la puissance p , reproduit A ; et que B étant une quantité réelle, $\overline{B^{\frac{1}{2p+1}}}$ désigne la quantité réelle qui, élevée à la puissance $2p+1$, reproduit B .

Désignons par a et b des quantités positives, par α et ξ des quantités réelles. Si dans (3) on pose tour à

tour

$$M = \left(\frac{b^q}{a^{q-1}} \right)^{\frac{1}{2q}}, \quad N = + (a^2)^{\frac{1}{2q}},$$

$$M = \left(\frac{b^q}{a^{q-1}} \right)^{\frac{1}{2q}}, \quad N = - (a^2)^{\frac{1}{2q}},$$

et que dans (4) on pose

$$M = \left(\frac{\xi^q}{\alpha^{q-1}} \right)^{\frac{1}{2q+1}}, \quad N = \left(\frac{\alpha^3}{\xi} \right)^{\frac{1}{2q+1}},$$

on aura les propositions suivantes.

8. Les racines des équations

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} x^{2q} - 2q \sum_{r=0}^{r=q-1} \left[\frac{(q+r-1)!}{(q-r)!(2r)!} a^{1-r} b^r x^{q-r} \right] \\ - \left(\frac{b^q}{a^{q-1}} - a^2 \right) = 0, \end{array} \right.$$

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} x^{2q} - 2q \sum_{r=0}^{r=q-1} \left[(-1)^{qr} \frac{(q+r-1)!}{(q-r)!(2r)!} a^{1-r} b^r x^{q-r} \right] \\ - \left(\frac{b^q}{a^{q-1}} - a^2 \right) = 0, \end{array} \right.$$

où a et b sont des quantités positives, sont respectivement comprises dans les formules

$$\rho \left(\frac{b^q}{a^{q-1}} \right)^{\frac{1}{2q}} + \rho^2 (a^2)^{\frac{1}{2q}}, \quad \rho \left(\frac{b^q}{a^{q-1}} \right)^{\frac{1}{2q}} - \rho^2 (a^2)^{\frac{1}{2q}},$$

ρ étant une quelconque des racines de $u^{2q} - 1 = 0$.

9. Les racines de l'équation

$$(7) \quad x^{2q+1} - (2q+1) \sum_{r=1}^{r=q} \left[\frac{(q+r-1)!}{(q+1-r)!(2r-1)!} \alpha^{2-r} \beta^{r-1} x^{q+1-r} \right] \\ - \left(\frac{\beta^q}{\alpha^{q-1}} + \frac{\alpha^3}{\beta} \right) = 0,$$

où α et β désignent des quantités réelles, sont comprises dans la formule

$$\rho \left(\frac{\beta^q}{\alpha^{q-1}} \right)^{\frac{1}{2q+1}} + \rho^2 \left(\frac{\alpha^3}{\beta} \right)^{\frac{1}{2q+1}},$$

ρ étant une racine quelconque de $u^{2q+1} - 1 = 0$.

En posant dans (7) $q = 2$, on a

$$x^5 - 5\alpha x^2 - 5\beta x - 3\frac{\beta^2}{\alpha} - \frac{\alpha^3}{\beta} = 0,$$

équation proposée dont les racines sont

$$\rho \left(\frac{\beta^2}{\alpha} \right)^{\frac{1}{5}} + \rho^2 \left(\frac{\alpha^3}{\beta} \right)^{\frac{1}{5}},$$

ρ étant une quelconque des racines de $u^5 - 1 = 0$.

10. Quant à la première des trois équations proposées

$$x^6 - 6x^4 - 28x^3 - 18x^2 + 12x - 2 = 0,$$

elle est un cas particulier d'une équation de même degré que nous allons former.

11. P étant une quantité positive, proposons-nous de former l'équation dont les racines se déduiraient de

$$\rho P^{\frac{1}{6}} + \rho^2 P^{\frac{2}{6}} + \rho^3 P^{\frac{3}{6}} \quad \text{ou} \quad \rho P^{\frac{1}{6}} + \rho^2 P^{\frac{1}{3}} + \rho^3 P^{\frac{1}{2}},$$

d'après le sens attaché à $P^{\frac{m}{2n}}$ (n° 7), en y remplaçant ρ par les racines de $u^6 - 1 = 0$.

Soit

$$x^6 + p_1 x^5 + \dots + p_6 = 0$$

l'équation cherchée

Désignons par S_m et par S'_m , m étant un nombre entier absolu qui peut être nul, les sommes des puissances d'exposant m des racines de l'équation cherchée et des racines de l'équation $u^6 - 1 = 0$

On aura évidemment S_m en remplaçant dans le développement de

$$\left[\rho P^{\frac{1}{6}} + \left(\rho P^{\frac{1}{6}} \right)^2 + \left(\rho P^{\frac{1}{6}} \right)^3 \right]^m$$

$$\left(5 P^{\frac{1}{6}} \right)^q \text{ par } P^{\frac{q}{6}} S'_q.$$

Il suffira même d'avoir égard aux termes où l'exposant est un multiple de 6, car S'_q est égal à 6 ou à 0, suivant que q est ou non un multiple de 6.

12. Or on a

$$u + u^2 + u^3 = u + u^2 + u^5,$$

$$(u + u^2 + u^3)^2 = u^2 + \dots + u^6,$$

$$(u + u^2 + u^3)^3 = u^3 + \dots + 7u^6 + \dots + u^9,$$

$$(u + u^2 + u^3)^4 = u^4 + \dots + 10u^6 + \dots + u^{12},$$

$$(u + u^2 + u^3)^5 = u^5 + \dots + 5u^6 + \dots + 30u^{12},$$

$$(u + u^2 + u^3)^6 = u^6 + \dots + 141u^{12} + \dots + u^{18},$$

13. On en déduit

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 6P, \quad S_3 = 42P,$$

$$S_4 = 60P + 6P^2, \quad S_5 = 30P + 180P^2, \quad S_6 = 6P + 846P^2 + 6P^3.$$

Substituant dans les équations connues,

$$\begin{aligned}
&S_1 + p_1 = 0, \\
&S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 = 0, \\
&\dots\dots\dots, \\
&S_6 + p_1 S_5 + \dots + 6p_6 = 0,
\end{aligned}$$

et résolvant, on a

$$\begin{aligned}
p_1 = 0, & & p_2 = -3P, & & p_3 = -14P, \\
p_4 = 3P \cdot (P - 5), & & p_5 = 6P \cdot (P - 1), & & p_6 = -P (P - 1)^2,
\end{aligned}$$

d'où la proposition suivante.

14. Les racines de l'équation

$$\begin{aligned}
&x^6 - 3Px^4 - 14P^2x^3 + 3P \cdot (P - 5)x^2 \\
&+ 6P \cdot (P - 1)x - P \cdot (P - 1)^2 = 0,
\end{aligned}$$

où P est une quantité réelle, sont comprises dans la formule

$$\rho P^{\frac{1}{6}} + \rho^2 P^{\frac{1}{3}} + \rho^3 P^{\frac{1}{2}},$$

ρ étant une quelconque des racines de $u^6 - 1 = 0$. Si l'on pose $P = 2$, on a l'équation d'Euler

$$x^6 - 6x^4 - 28x^3 - 18x^2 + 12x - 2 = 0,$$

dont les racines sont données par

$$\rho \cdot 2^{\frac{1}{6}} + \rho^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} + \rho^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}.$$

