NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. MATHIEU

Solution des questions de l'algèbre Bertrand (voir t. XVII, p. 12)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 371-388

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__371_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SOLUTION DES QUESTIONS DE L'ALGÈBRE BERTRAND

(voir t. XVII, p. 12),

PAR M. E. MATHIEU,
Professeur.

X. Trouver la somme des carrés des coefficients du binôme. Cette somme peut être représentée par les deux formules

$$\frac{2n(2n-1)\ .\ (n+1)}{1.2.3\ldots n},\quad \frac{2.6.10.14\ldots(4n-2)}{1.2\ 3\ldots n};$$

prouver que ces deux formules sont équivalentes.

Remarquons d'abord que l'expression

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

représente le nombre de combinaisons de $2n$ lettres n à n. Or, pour former ces combinaisons, supposons qu'on agisse de la manière suivante :

On partage ces $2n$ lettres en deux groupes, chacun de n lettres.

Puis, ne prenant d'abord dans le premier groupe aucune lettre, on prend toutes celles du second groupe ; ce qui formera une des combinaisons cherchées.

En second lieu, on prend une lettre dans le premier groupe, ce qui peut se faire de n manières, et on la combine avec $n-1$ lettres du deuxième groupe, ce qui peut encore se faire de n manières. On aura ainsi n^2 combinaisons.

En troisième lieu, on prend deux lettres dans le premier groupe, ce qui peut se faire de $\frac{n(n-1)}{2}$ manières, et l'on combine chacun de ces produits avec $n-2$ lettres du deuxième, ce qui donne pour chacun des produits de deux lettres du premier groupe $\frac{n(n-1)}{1.2}$ produits. On aura donc en tout $\left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right)$ combinaisons.

En imaginant que l'on continue ainsi, il devient évident que l'on a

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} = 1^2 + n^2 + \left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right)^2 + \ldots.$$

Remarquons maintenant que l'on a

$$(\alpha) \quad 2n(2n-1)\ldots(n+1) = 2.6.10.14\ldots(4n-2).$$

En effet, l'égalité est vérifiée quand on fait $n=1$, il suffit dont de prouver que si cette égalité a lieu lorsqu'on y change n en $n-1$, l'égalité (α) elle-même aura lieu.

Supposons donc que l'on ait

$$(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)n = 2.6.10\ldots(4n-6);$$

en multipliant les deux membres par $4n-2$, on tombe sur l'égalité (α); donc cette égalité est démontrée.

La somme des carrés des coefficients du binôme peut donc encore être représentée par la formule

$$\frac{2.6.10\ldots(4n-2)}{1.2.3\ldots n}.$$

XI. Prouver que si dans la somme

$$S = \frac{1-x}{1-a} + \frac{(1-x)(a-x)}{a-a^3} + \ldots$$
$$+ \frac{(1-x)(a-x)\ldots(a^{n-1}-x)}{a^{\frac{n(n-1)}{2}} - a^{\frac{n(n+1)}{2}}} + \ldots,$$

on fait $x = a^n$, cette somme devient égale à n.

Si dans l'expression de S on fait $x = a^n$, tous les termes après le dernier écrit dans cette expression s'annulent, et en désignant par S_n le résultat de la substitution, on a

$$S_n = \frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \ldots$$
$$+ \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})\ldots(1-a)}{1-a^n}.$$

Or on a

$$\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})\ldots(1-a^{n-p})}{1-a^{p+1}}$$
$$= \frac{(1-a^{n-1})\ldots(1-a^{n-p})(1-a^{n-p-1})}{1-a^{p+1}}$$
$$+ (1-a^{n-1})\ldots(1-a^{n-p})\,a^{n-p-1};$$

donc on aura

$$S_n = \frac{1 - a^{n-1}}{1 - a} + \frac{(1 - a^{n-1})(1 - a^{n-2})}{1 - a^2} + \ldots$$

$$+ \frac{(1 - a^{n-1})\ldots(1 - a^2)(1 - a)}{1 - a^{n-1}} + a^n + a^{n-1}(1 - a^n) + \ldots$$

$$+ a^0(1 - a^n)\ldots(1 - a^2)(1 - a).$$

Posons

$$A_n = a^n + a^{n-1}(1 - a^n) + \ldots + a^0(1 - a^n)\ldots(1 - a^2)(1 - a),$$

et nous aurons

$$S_n = S_{n-1} + A_n$$

et

$$A_n = a^n + (1 - a^n)$$

$$\times[a^{n-1} + a^{n-2}(1 - a^{n-1}) + \ldots + a_0(1 - a^{n-1})\ldots(1 - a^2)(1 - a),$$

ou

$$A_n = a^n + (1 - a^n) A_{n-1}.$$

Or on a $A_0 = 1$; donc, d'après cette dernière formule, on aura $A_1 = 1$, $A_2 = 1, \ldots, A_n = 1$.

D'autre part on a $S_1 = 1$; donc on aura $S_2 = 2$, $S_3 = 3, \ldots, S_n = n$.

XIII. On donne l'équation

$$ax^4 + by^4 + cz^4 + 2dx^2y^2 + 2ex^2z^2 + 2fy^2z^2$$
$$+ mx^2 + ny^2 + pz^2 + q = 0.$$

Trouver entre quelles limites peut varier $x^2 + y^2 + z^2$.

Commençons par tirer z^2 de l'équation donnée pour le porter dans l'équation

$$u = x^2 + y^2 + z^2;$$

et nous chercherons ensuite entre quelles limites peut varier u. En tirant z^2 de l'équation donnée, on a

$$z^2 = \frac{-p - 2ex^2 - 2fy^2}{2c}$$

$$\pm\sqrt{Ay^4 + Bx^2y^2 + Cx^4 + Dy^2 + Ex^2 + F},$$

en posant

$$A = \frac{f^2 - bc}{c^2}, \quad B = \frac{2ef}{c^2}, \quad C = \frac{e^2 - ac}{c^2},$$

$$D = \frac{pf - cn}{c^2}, \quad E = \frac{pe - cm}{c^2}, \quad F = \frac{p^2 - 4cq}{4c^2}.$$

Portant z^2 dans l'expression de u, on a

$$u = \frac{c - e}{c}x^2 + \frac{c - f}{c^2}y^2 - \frac{p}{2c}$$

$$\pm\sqrt{Ay^4 + Bx^2y^2 + Cx^4 + Dy^2 + Ex^2 + F}.$$

Résolvons cette équation par rapport à y^2, et pour cela chassons d'abord le radical, ce qui nous donne

$$(\xi) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(u + \frac{e - c}{c}x^2 + \frac{f - c}{c}y^2 + \frac{p}{2c}\right)^2 \\ = Ay^4 + Bx^2y^2 + Cx^4 + Dy^2 + Ex^2 + F. \end{array} \right.$$

En résolvant cette équation par rapport à y^2, on trouvera une expression de la forme suivante

$$y^2 = \alpha x^2 + \beta \pm \sqrt{Nx^4 + Px^2 + Q},$$

β, P et Q étant des quantités qui contiennent u, et α et N étant des quantités qui ne le contiennent pas.

y^2 doit d'abord être réel, il faut donc que l'on ait

$$(\eta) \qquad Nx^4 + Px^2 + Q > 0.$$

N peut être positif ou négatif. S'il est négatif, il faudra que x^2 soit compris entre les deux racines de l'équation

$$Nx^4 + Px^2 + Q = 0,$$

ce qui exigera que l'on ait

$$P^2 - 4NQ > 0, \quad \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4NQ}}{2N} > 0.$$

P et Q étant fonctions de u, ces deux inégalités nous indiqueront des limites de u. Si N est positif, l'inégalité (η) pourra toujours avoir lieu, quelle que soit u, et la réalité de y^2 ne donne plus de conditions. Enfin il faudra que y soit réel, ou que y^2 soit positif, et pour cela il suffira que la plus petite valeur de y^2 soit positive. Or, en résolvant l'équation (ξ) par rapport à x^2, on aura

$$x^2 = \alpha_1 y^2 + \beta_1 \pm \sqrt{N_1 y^4 + P_1 y^2 + Q_1}.$$

Soient y_1^2 et y_2^2 les racines de l'équation

$$N_1 w^2 + P_1 w + Q = 0,$$

on aura

$$y_1^2 = \lambda\, u^2 + \mu\, u + \nu,$$
$$y_2^2 = \lambda' u^2 + \mu' u + \nu'.$$

Supposons $N_1 < 0$, nous chercherons entre quelles limites doit varier u, pour que la quantité

$$(\lambda - \lambda')u^2 + (\mu - \mu')u + \nu - \nu'$$

soit plus grande ou plus petite que zéro. On trouvera ainsi que y_2 est minimum quand u varie entre u_1 et u_2, et l'on posera

$$u > u_1, \quad u < u_2, \quad \lambda' u^2 + \mu' u + \nu' > 0.$$

On trouvera aussi que y_1 est minimum quand u varie depuis $-\infty$ jusqu'à u_1, et depuis u_2 jusqu'à $+\infty$, et l'on aura

$$u < u_1 \quad \text{ou} \quad u > u_2 \quad \text{avec} \quad \lambda u^2 + \mu u + \nu > 0.$$

Si N_1 était > 0, on exprimerait encore que le minimum de y est > 0.

XIV. Entre quelles limites peut varier l'expression

$$(x+y)^2+(y+z)^2+(z-3x)^2+2x-y+z+10,$$

lorsque x, y, z prennent toutes les valeurs possibles?

Ordonnons cette expression par rapport à x, et, d'après la règle générale, égalons-la à une quantité indéterminée m. Ainsi nous posons

$$10x^2+2(y-3z+1)x+2y^2+2yz+2z^2-y+z+10=m,$$

et nous allons chercher entre quelles limites peut varier m pour que x, y, z restent réels. Résolvons cette équation par rapport à x, nous trouverons

$$x=\frac{-y+3z-1\pm\sqrt{-19y^2-2(13z-6)y-11z^2-16z-99+10m}}{10}.$$

Pour que x soit réel, il faut que la quantité qui se trouve sous le radical soit positive, ce qui donne

$$(1)\qquad 19y^2+2(13z-6)y+11z^2+16z+99-10m<0.$$

Or, pour que cette inégalité soit satisfaite, il faut et il suffit que y soit compris entre les racines y' et y'' de l'équation

$$19y^2+2(13z-6)y+11z^2+16z+99-10m=0;$$

ainsi les valeurs de y' et y'' sont les suivantes

$$y=\frac{-13z+6\pm\sqrt{-40z^2-460z-1845+190m}}{19}.$$

Les valeurs de y' et de y'' devant être réelles, on a

$$(2)\qquad 40z^2+460z+1845-190m<0.$$

Pour que cette inégalité puisse avoir lieu, on voit encore qu'il faut et il suffit que z soit compris entre les quantités z' et z'', dont les valeurs seront données par l'expression

$$z = \frac{-230 \pm \sqrt{230^2 - 40 \times 1845 + 40 \times 190m}}{40};$$

z' et z'' devant être réels, nous aurons

$$230^2 - 40 \times 1845 + 40 \times 190m > 0,$$

et en effectuant les calculs,

$$m > \frac{11}{4};$$

telle est la condition nécessaire et suffisante. Ainsi le polynôme proposé peut varier depuis $\frac{11}{4}$ jusqu'à ∞ quand x, y, z prennent toutes les valeurs possibles. Il faut bien remarquer que les inégalités (1) et (2) ne donnent que des conditions auxquelles doit être assujettie m, puisque x, y, z peuvent être quelconques.

XV. On donne trois équations à deux inconnues,

$$ax + by = d,$$
$$a'x + b'y = d',$$
$$a'x + b''y = d''$$

Il existe un nombre infini de facteurs λ, λ', λ'', tels, qu'en multipliant la première équation par λ, la seconde par λ', la troisième par λ'', et en ajoutant les résultats, on obtient une équation de la forme

$$x = \lambda d + \lambda' d' + \lambda'' d'''.$$

Trouver les facteurs λ, λ', λ'' qui, remplissant cette condition, rendent la somme $\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2$ la plus petite possible.

Les quantités λ, λ', λ'' sont reliées entre elles par les équations

$$a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' = 1,$$

$$b\lambda + b'\lambda' + b''\lambda'' = 0.$$

Ajoutons-y l'équation

$$d\lambda + d'\lambda' + d''\lambda'' = \nu,$$

ν étant une indéterminée, et résolvons ces trois équations; posons

$$R = a'b'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a'',$$

et nous trouverons

$$\lambda = \frac{(b'd'' - d'b'') + (a'b'' - b'a'')\nu}{R},$$

$$\lambda' = \frac{(db'' - bd'' + (ba'' - ab'')\nu}{R},$$

$$\lambda'' = \frac{bd' - db' + (ab' - ba')\nu}{R}.$$

En désignant donc par u la somme $\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2$, nous avons

$$\begin{aligned} R^2 u = {} & [b'd'' - db'' + (a'b'' - b'a'')\nu]^2 \\ & + [db'' - bd'' - (ab'' - ba'')\nu]^2 \\ & + [bd' - db' + (ab' - ba')\nu]^2; \end{aligned}$$

u se trouve ainsi exprimé au moyen de la seule indéterminée ν; posons

$$b'd'' - d'b'' = A, \quad db'' - bd'' = A', \quad bd' - db' = A'',$$

$$a'b'' - b'a'' = B, \quad ab'' - ba'' = B', \quad ab' - ba' = B'',$$

et l'équation précédente pourra s'écrire

$$R^2 u = (A + B\nu)^2 + (A' + B'\nu)^2 + (A'' + B''\nu)^2,$$

ou, si nous ordonnons par rapport à v,

$$(B^2 + B'^2 + B''^2)v^2 + 2(AB + A'B' + A''B'')v$$
$$+ A^2 + A'^2 + A''^2 - R^2 u = 0.$$

D'après la règle générale, résolvons cette équation, ce qui nous donnera

$$= \frac{-(AB+A'B'+A''B'') \pm \sqrt{(AB+A'B'+A''B'')^2 - (B^2+B'^2+B''^2)(A^2+A'^2+A''^2-R^2 u)}}{B^2+B'^2+B''^2}.$$

Pour que le radical soit réel, il faut que u soit au moins égal à

$$\frac{(B^2 + B'^2 + B''^2)(A^2 + A'^2 + A''^2) - (AB + A'B' + A''B'')^2}{R^2(B^2 + B'^2 + B''^2)},$$

ou à

$$\frac{(AB' - BA')^2 + (A''B - AB'')^2 + (A'B'' - B'A'')^2}{R^2(B^2 + B'^2 + B''^2)}.$$

Donc cette expression est le minimum de u, la valeur de v correspondante est $-\frac{AB + A'B' + A''B''}{B^2 + B'^2 + B''^2}$, qu'il faudra porter dans les expressions de λ, λ', λ'' pour avoir celles-ci.

CHAPITRE XII (p. 166).

I. Quelles sont les progressions par différence dans lesquelles la somme de deux termes quelconques fait partie de la progression ; et les progressions par quotient dans lesquelles le produit de deux termes fait partie de la progression ?

Soient u et v deux termes quelconques d'une progression par différence dont la raison est r, on aura

$$u = a + nr, \quad v = a + pr$$

et

$$u + v = 2a + (n + p) r.$$

Si $u+v$ est un terme de la progression, on a aussi

$$u+v=a+kr.$$

En comparant ces deux valeurs de $u+v$, on voit que le premier terme a sera un multiple de la raison.

Considérons maintenant deux termes quelconques d'une progression par quotient; ils seront

$$u=aq^n,\quad v=aq^p,$$

et l'on aura $uv=a^2q^{n+p}$; uv étant un terme de la progression, on a aussi $uv=aq^\lambda$; a est donc une puissance de la raison.

III. Dans quelles progressions par différence existe-t-il un rapport indépendant de n, entre la somme des n premiers termes et la somme des n suivants.

La somme des n premiers termes est

$$S=\frac{[2a+(n-1)r]n}{2}.$$

la somme des n suivants est

$$S'=\frac{[2a+(3n-1)r]n}{2};$$

et l'on aura

$$\frac{S}{S'}=\frac{nr+2a-r}{3nr+2a-r}=\frac{1+\dfrac{2a-r}{nr}}{3+\dfrac{2a-r}{nr}}.$$

Ainsi en général $\dfrac{S}{S'}$ n'est pas indépendant de n, mais il tend vers $\dfrac{1}{3}$ à mesure que n augmente. Le raisonnement n'est en défaut que lorsque r est nul, parce que l'on ne peut plus diviser les deux termes de la fraction par r. Dans ce cas, $\frac{S}{S'}$ est évidemment constamment égal à 1, et la progression cherchée a tous ses termes égaux à a.

V. Si l'on prend la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7,..., et qu'on la sépare en groupes dont le premier ait un terme, le second deux termes, le troisième trois, etc., la somme des termes d'un même groupe est un cube.

Le nombre de termes qui précèdent le $n^{ième}$ groupe est égal à $1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1$, ou à $\frac{n(n-1)}{2}$. On trouve alors facilement le premier terme du $n^{ième}$ groupe; il est $1 + n(n-1)$, et il nous reste à trouver la somme des n termes de la progression

$$n(n-1)+1, \quad n(n-1)+3, \ldots, \quad n(n-1)+2n-1;$$

elle est $\frac{[n(n-1)+1+n(n-1)+2n-1]n}{2}$ ou n^3.

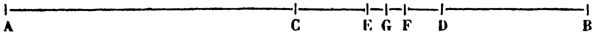
VI. Si l'on considère la suite 1, 2, 4, 6, 8, 10,..., la somme des n premiers termes est impaire et, augmentée des $n - 1$ nombres impairs suivants, elle donne un cube.

La somme des $n - 1$ nombres 2, 4, 6,..., $2n - 2$ est $n(n-1)$, et la somme des n nombres impairs que nous recherchons est

$$n(n-1)+1+n(n-1)+3+\ldots+n(n-1)+2n-1,$$

comme dans l'exercice précédent; elle est donc n^3.

X. Soit AB une ligne quelconque, on marque son



milieu C, puis le milieu D de CB, puis le milieu E de DC, puis le milieu F de ED, le milieu G de FE, et ainsi de suite indéfiniment; prouver que les points C, D, E, F, G s'approchent de plus en plus du tiers de AB, à partir du point B.

On aura

$$BE = \frac{3}{8},$$

$$BF = \frac{3}{8} - \frac{1}{16},$$

$$BG = \frac{3}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32}.$$

En continuant ainsi, on voit qu'en désignant par X le point cherché, on aura

$$BX = \frac{3}{8} - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4 \times 16} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{4 \times 32} + \ldots\right).$$

Ayant fait la somme des termes de chacune de ces progressions, on aura

$$BX = \frac{3}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3},$$

ce qui est précisément ce qu'il fallait trouver.

XI. Trouver la limite de la somme des fractions

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \ldots,$$

dont les numérateurs forment une progression par différence, et les dénominateurs une progression par quotient.

Désignons par S la limite de cette somme, nous aurons

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \ldots,$$

ce qui peut s'écrire

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \frac{4}{32} + \ldots.$$

La première série est une progression par quotient, dont la somme des termes est égale à 1 ; la deuxième série est égale à $\frac{S}{2}$; on a donc

$$S = 1 + \frac{1}{2} S;$$

d'où

$$S = 2.$$

XIII. Si dans une progression par différence trois termes consécutifs sont des nombres premiers, la raison est divisible par 6, à moins que le premier de ces termes ne soit 3. S'il y en a 5, la raison est divisible par 30, à moins que le premier de ces termes ne soit 5, et s'il y en a 7, elle est divisible par 210, à moins que le premier de ces termes ne soit 7.

Considérons en général k termes consécutifs d'une progression par différence

$$a, \quad a + r, \quad a + 2r, \quad \ldots, \quad a + (k - 1) r,$$

et supposons k un nombre premier; si aucun de ces termes n'est divisible par k, r est divisible par k.

En effet, supposons, si cela est possible, que r ne soit pas divisible par k, je dis d'abord que les restes de la division des nombres r, $2r$, $3r, \ldots, (k-1)r$ par k seront tous différents, et, par conséquent, seront dans un ordre quelconque $1, 2, 3, \ldots, k-1$.

Car, si deux de ces restes étaient égaux à α, m et n étant des nombres plus petits que k, on aurait

$$mr = qk + \alpha, \quad nr = q'k + \alpha,$$

et par suite

$$(m - n) r = (q - q') k$$

et

$$\frac{(m-n)r}{k} = q - q',$$

ce qui est impossible, puisque le nombre premier k ne peut diviser ni $m - n$, ni r.

Or a n'étant pas divisible par k, l'addition de a à un des nombres $1, 2, 3, \ldots, k - 1$ donnera un nombre divisible par k. Ainsi il est impossible de supposer que r ne soit pas divisible par k.

Cela posé, si dans une progression par différence deux termes consécutifs sont des nombres premiers, la raison est divisible par 2, à moins que le premier de ces termes ne soit 2.

Si trois termes consécutifs sont des nombres premiers, la raison est divisible par 3, à moins que le premier de ces termes ne soit 3; elle est d'ailleurs divisible par 2; donc elle est divisible par 6.

Si cinq termes consécutifs sont des nombres premiers, la raison est divisible par 5, à moins que le premier de ces termes ne soit 5; elle est d'ailleurs évidemment divisible par 2 et par 3; donc elle est divisible par 30.

On voit de même que si sept termes consécutifs sont des nombres premiers, la raison est divisible par 30×7 ou 210, si le premier de ces termes n'est pas 7.

XIV. Dans une progression par quotient dont le nombre des termes est impair, la somme des carrés des termes est égale à la somme des termes multipliée par l'excès de la somme des termes de rang impair sur la somme des termes de rang pair.

Soit

$$\div\!\div\, a : aq : aq^2 : \ldots : aq^n$$

la progression donnée; n y est pair, et les carrés des termes de cette progression forment une autre progression par quotient

$$\div\!\div\, a^2 : aq^2 : a^2q^4 : \ldots : a^2q^{2n}.$$

Les sommes des termes de ces deux progressions sont respectivement

$$S = \frac{a(q^{n-1} - 1)}{q - 1} \quad \text{et} \quad S_1 = \frac{a^2(q^{2n+2} - 1)}{q^2 - 1}.$$

S_1 peut s'écrire

$$S_1 = \frac{a(q^{n+1} - 1)}{q - 1} \times \frac{a(q^{n+1} + 1)}{q^2 - 1}.$$

Or, $n + 1$ étant impair, on aura, en effectuant la division de $q^{n+1} + 1$ par $q + 1$

$$\frac{q^{n+1} + 1}{q + 1} = q^n - q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots - q + 1.$$

Donc

$$S_1 = S[(aq^n + aq^{n-2} + \ldots + a) - (aq^{n-1} + aq^{n-3} + \ldots + aq)],$$

C. Q. F. D.

XV. Éliminer y entre les deux équations

$$x^m + x^{m-1}y + x^{m-2}y^2 + \ldots + y^m = a^m,$$
$$x^{2m} + x^{2m-2}y^2 + x^{2m-4}y^4 + \ldots + y^{2m} = b^{2m}.$$

Les premiers membres de ces deux équations sont deux progressions dont les raisons sont $\frac{y}{x}$ et $\frac{y^2}{x^2}$; ces deux équations peuvent donc s'écrire

$$\frac{y^{m+1} - x^{m+1}}{y - x} = a^m,$$
$$\frac{y^{2m+2} - x^{2m+2}}{y^2 - x^2} = b^{2m}.$$

Divisant la seconde par la première, on a

$$\frac{y^{m+1} + x^{m+1}}{y + x} = \frac{b^{2m}}{a^m}.$$

On aura donc les deux équations

$$y^{m+1} - x^{m+1} = a^m y - a^m x,$$
$$y^{m+1} + x^{m+1} = \frac{b^{2m}}{a^m} y + \frac{b^{2m}}{a^m} x.$$

Retranchant ces deux équations membre à membre, on aura

$$2x^{m+1} = \frac{b^{2m} - a^{2m}}{a^m} y + \frac{b^{2m} + a^{2m}}{a^m} x;$$

d'où

$$y = \frac{2a^m x^{m+1} - (b^{2m} + a^{2m})x}{b^{2m} - a^{2m}}.$$

On portera cette valeur de y dans l'équation

$$\frac{y^{m+1} - x^{m+1}}{y - x} = a^m,$$

et après les réductions, on trouvera

$$\begin{aligned} &x^m (2a^m x^m - a^{2m} - b^{2m})^{m+1} \\ &= (b^{2m} - a^{2m})^m [(b^{2m} + a^{2m}) x^{2m} - 2a^m b^{2m}], \end{aligned}$$

équation qui ne contient plus que x.

XVI. Trouver une progression par quotient, connaissant la somme de ses termes, la somme de leurs carrés et celle de leurs cubes.

Les carrés et les cubes des termes de la progression cherchée forment aussi une progression par quotient. Soient S_1, S_2, S_3 la somme des termes, la somme de leurs carrés et celle de leurs cubes, on aura les trois équations

$$S_1 = \frac{lq - a}{q - 1},$$
$$S_2 = \frac{l^2 q^2 - a^2}{q^2 - 1},$$
$$S_3 = \frac{l^3 q^3 - a^3}{q^3 - 1},$$

dans lesquelles a, l, q sont les trois inconnues. Divisons membre à membre les deux dernières équations par la première, et nous aurons les trois équations

$$S_1 = \frac{lq' - a}{q - 1},$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{lq + a}{q + 1},$$

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{l^2 q^2 + laq + a^2}{q^2 + q + 1}.$$

Les deux premières ne contiennent les inconnues qu'au premier degré; tirons a et q de ces deux équations, nous trouverons

$$(\alpha) \quad q = \frac{S_1^2 - S_2}{S_1^2 - 2lS_1 + S_2} \quad \text{et} \quad a = \frac{2S_1S_2 - lS_1^2 - lS_2}{S_1^2 - 2lS_1 + S_2}.$$

Portant ces valeurs de q et de a dans la troisième équation, nous aurons une équation qui ne renfermera plus que l'inconnue l; elle est

$$S^3(3S_1^4 - 6lS_1^3 + 4l^2S_1^2 + S_2^2 - 2lS_1S_2)$$
$$= S_1(3l^2S_2^2 - 2lS_1^3S_2 - 6lS_1S_2^2 + 4S_1^2S_2^2 + l^2S_1^4);$$

et si on la résout par rapport à l, elle devient

$$S_1(S_1^4 + 4S_1S_3 + 3S_2^2)l^2 - 2(S_1^4S_2 - 3S_1^3S_3 + 3S_1^2S_2^2 - S_1S_2S_3)l$$
$$+ 4S_1^3S_2^2 - 3S_1^4S_3 - S_2^2S_3 = 0.$$

l étant trouvée par cette équation du second degré, on portera sa valeur dans les expressions (α), et l'on aura a et q.