

H. LECOCQ

**Rayons de courbure. Trouver l'équation de la courbe telle que ses rayons de courbure soient vus d'un point donné sous un angle donné**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 19 (1860), p. 285-289

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1860\\_1\\_19\\_\\_285\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__285_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

---

### RAYONS DE COURBURE.

Trouver l'équation de la courbe telle, que ses rayons de courbure soient vus d'un point donné sous un angle donné ;

PAR M. H. LECOCQ,

Licencié ès Sciences mathématiques, Maître répétiteur au lycée  
Louis-le-Grand.

---

En prenant le point donné pour origine des coordonnées et désignant par  $x, y, r, \theta$  les coordonnées rectangulaires et polaires, on a

$$\text{tang } \theta = \frac{y}{x}.$$

D'un autre côté, le rayon vecteur mené de l'origine au centre de courbure fait avec l'axe des  $x$  un angle  $\omega$  dont la tangente est le rapport de l'ordonnée à l'abscisse de ce centre, savoir

$$\text{tang } \omega = \frac{y + \frac{1+p^2}{q}}{x - p \frac{1+p^2}{q}},$$

$p$  et  $q$  étant respectivement égaux à  $\frac{dy}{dx}$  et  $\frac{d^2y}{dx^2}$ . On doit donc avoir, en appelant  $K$  la tangente de l'angle donné,

$$K = \text{tang}(\omega - \theta),$$

ce qui conduit à l'équation différentielle du deuxième ordre

$$K = \frac{(1+p^2)(x+py)}{q(x^2+y^2) + (1+p^2)(y-px)}$$

Cette équation étant homogène par rapport à  $x, y, dx, dy, d^2y$ , on sait que si l'on pose

$$y = ux, \quad dy = p dx, \quad d^2y = \frac{Q}{x} dx^2,$$

$x$  et  $dx$  disparaissent : on obtient en effet par ces substitutions

$$(1) \quad K [Q(1+u^2) + (1+p^2)(u-p)] = (1+p^2)(1+pu);$$

on sait aussi qu'alors on doit avoir

$$(2) \quad \frac{du}{p-u} = \frac{dp}{Q} = \frac{K dp (1+u^2)}{(1+p^2)(1+pu) + K(1+p^2)(p-u)};$$

or si l'on pose encore

$$p = \text{tang } \varphi, \quad u = \text{tang } \theta,$$

d'où l'on tire

$$dp = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = d\varphi(1 + p^2), \quad du = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = d\theta(1 + u^2),$$

l'équation (2) se transformera finalement dans l'équation

$$(3) \quad d\theta = K \operatorname{tang}(\varphi - \theta) \cdot d(\varphi - \theta).$$

En intégrant, on en tire

$$-\frac{\theta}{K} = L \sqrt{A} \cos(\varphi - \theta),$$

A désignant une constante arbitraire.

Passant aux exponentielles et développant le cosinus en se servant des relations

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{dy}{ds}, & \sin \theta &= \frac{y}{r}, \\ \cos \varphi &= \frac{dx}{ds}, & \cos \theta &= \frac{x}{r}, \end{aligned}$$

on trouve facilement

$$r \frac{d\theta}{dr} = \sqrt{A e^{\frac{2\theta}{K}} - 1},$$

d'où

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\sqrt{A e^{\frac{2\theta}{K}} - 1}} = K \frac{dz}{1 + z^2},$$

si l'on a posé

$$z^2 = A e^{\frac{2\theta}{K}} - 1.$$

L'équation cherchée se trouvera en intégrant de nou-

veau. On obtient ainsi

$$L.Br = K \operatorname{arc tang} \sqrt{A e^{\frac{2\theta}{K}} - 1},$$

B étant une seconde constante arbitraire.

On peut remarquer que la formule

$$\frac{r d\theta}{dr} = \sqrt{A e^{\frac{2\theta}{K}} - 1} = z$$

donne la tangente trigonométrique de l'angle que fait la tangente en un point quelconque de la courbe avec le rayon vecteur de ce point.

Si l'on suppose  $K = 0$ , on en conclut  $dr = 0$  ou  $r = \text{constante}$ . C'est-à-dire que la courbe se réduit à une circonférence dont le point de vue est le centre. De ce point on voit en effet les différents rayons sous un angle nul. La valeur de  $z$  est infinie, car la tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon.

Si l'on suppose  $K = \infty$ , l'équation donne pour  $z$  une valeur constante, propriété qui appartient à une spirale logarithmique. Dans ce cas on voit que tous les triangles qui ont pour sommet le point de vue et pour base le rayon de courbure sont tous semblables entre eux, car ils sont rectangles et ont un angle aigu égal dont la tangente est  $\frac{1}{z}$ : il en résulte que le rayon de courbure est proportionnel au rayon vecteur.

En général, les coordonnées du centre de courbure  $\alpha$  et  $\beta$  seront

$$\beta = y + \frac{1 + p^2}{q} = \frac{Kx + y}{1 + Kz},$$

$$\alpha = x - \frac{p(1 + p^2)}{q} = \frac{x - Ky}{1 + Kz},$$

en se servant des valeurs

$$p = \frac{xz + y}{x - yz}, \quad q = \frac{(1 + z^2)(1 + Kz)r^2}{K(x - yz)^3}.$$

Les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  donnent

$$\frac{\beta}{x} = \frac{\beta - K\alpha}{\alpha + K\beta},$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{(1 + K^2)r^2}{(1 + Kz)^2}.$$

Or  $z$  n'étant fonction que de  $\frac{y}{x}$ , il en résulte qu'entre les deux équations précédentes et celle de la courbe, on peut facilement éliminer  $x$  et  $y$ , ce qui conduit à l'équation de la développée qui est, en appelant  $\gamma$  l'angle donné dont la tangente est  $K$ ,

$$L \frac{Br}{\sqrt{1 + K^2}} + L \left[ 1 + K \operatorname{arc tang} \sqrt{A e^{\frac{2}{K}(\theta - \gamma)} - 1} \right]$$

$$= K \operatorname{arc tang} \sqrt{A e^{\frac{2}{K}(\theta - \gamma)} - 1}.$$

Le valeur générale du rayon de courbure est

$$\rho = \frac{Kr\sqrt{1 + z^2}}{1 + Kz}.$$