

J. T.

Questions d'examen sur les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 206-210

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__206_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS D'EXAMEN SUR LES CONIQUES;

PAR J. T., ABONNÉ.

I.

Lieu décrit par le milieu d'une droite de longueur constante, dont les extrémités glissent sur une ellipse.

Soient $2l$ la longueur de la corde, x' , y' , x'' , y'' les coordonnées de ses extrémités, x et y celles de son milieu. Pour résoudre la question, il faut éliminer x' , y' , x'' , y'' entre les cinq équations suivantes, qui expriment les conditions du problème :

$$\begin{aligned}a^2 y'^2 + b^2 x'^2 &= a^2 b^2, \\a^2 y''^2 + b^2 x''^2 &= a^2 b^2, \\(y' - y'')^2 + (x' - x'')^2 &= 4l^2, \\2x &= x' + x'', \\2y &= y' + y''.\end{aligned}$$

Ces relations donnent, pour l'équation du lieu cherché,

$$\begin{aligned}(a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2)(a^4 y^2 + b^4 x^2) \\+ a^2 b^2 l^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2) = 0 \quad (*).\end{aligned}$$

(*) Lorsque $l = a$ ou $l = b$, la courbe doit se condenser au centre; comment? et que devient la courbe lorsque $2l$ signifie le grand axe? Tm.

Remarque I. Dans le cas où $a = b$, l'ellipse se réduit à un cercle, et l'équation devient

$$x^2 + y^2 = a^2 l^2,$$

ce qui doit être.

Remarque II. La surface comprise entre la courbe et l'ellipse a pour expression πl^2 , d'après un théorème de M. Holdisch. La formule se vérifie immédiatement dans le cas du cercle.

Si la droite glisse sur une parabole, un calcul entièrement analogue donne pour équation du lieu

$$(y^2 - 2px)(y^2 + p^2) + p^2 l^2 = 0.$$

II.

Déterminer, dans le plan d'une ellipse, un point tel, que l'on puisse mener deux tangentes égales à la courbe.

Soient x_1, y_1 les coordonnées du point cherché. La corde de contact correspondante a pour équation

$$a^2 y y_1 + b^2 x x_1 = a^2 b^2,$$

et la perpendiculaire abaissée du point sur la corde

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^4 x_1} (x - x_1).$$

Éliminant y , on a pour la valeur de l'abscisse du pied de la perpendiculaire

$$x = \frac{a^2 x_1 [b^4 + (a^2 - b^2) y_1^2]}{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}.$$

Si l'on exprime que cette valeur est celle du milieu de la corde de contact, il est évident que les tangentes seront égales.

Les abscisses des points de rencontre de la corde de

contact et de l'ellipse sont données par l'élimination de y entre les équations

$$\begin{aligned} a^2 y^2 + b^2 x^2 &= a^2 b^2, \\ y &= -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1}, \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'équation

$$(a^2 b^2 y_1 + b^4 x_1^2) x^2 - 2 a^2 b^4 x_1 x + a^4 b^4 - a^4 b^2 y_1^2 = 0;$$

d'où

$$\frac{x' + x''}{2} = \frac{a^2 b^4 x_1}{a^2 b^2 y_1^2 + b^4 x_1^2}.$$

La condition à laquelle doivent satisfaire x_1 et y_1 dans le cas des tangentes égales est donc

$$\frac{b^4 - x_1}{a^2 b^2 y_1^2 + b^4 x_1^2} = \frac{x_1 [b^4 + (a^2 - b^2) y_1^2]}{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2};$$

cette équation est satisfaite, même par $x_1 = 0$ ou par $y_1 = 0$, c'est-à-dire pour des points situés sur les axes; de plus, simplifiant, on a

$$\frac{b^2}{a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2} = \frac{b^4 + (a^2 - b^2) y_1^2}{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2};$$

d'où l'on déduit comme facteur

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

ce qui donne tous les points situés sur l'ellipse. En effet, alors les deux tangentes sont également nulles; de même pour les deux autres coniques.

III.

Deux poids P et P' attachés aux extrémités d'un cordon reposent sur une ellipse dont le grand axe est vertical.

Déterminer la relation qui existe entre les poids et les ordonnées correspondantes à la position d'équilibre.

Soient M et M' les points correspondants à la position d'équilibre. Les poids seront, par rapport aux tangentes menées en ces points, comme sur deux plans inclinés. On aura donc, dans le cas de l'équilibre, α et α' étant les angles que font les tangentes avec le grand axe,

$$P \cos \alpha = P' \cos \alpha';$$

or, l'équation de la courbe étant

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

on a

$$\cos \alpha = \frac{-a^2 y}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}} \quad \text{et} \quad \cos \alpha' = \frac{-a^2 y'}{\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}};$$

et par suite l'équation de l'équilibre devient

$$\frac{P^2 y^2}{a^4 y^2 + b^4 x^2} = \frac{P'^2 y'^2}{a^4 y'^2 + b^4 x'^2};$$

d'où

$$a^4 y^2 y'^2 (P^2 - P'^2) = b^4 (P'^2 x^2 y'^2 - P^2 x'^2 y^2),$$

et remplaçant x^2 et x'^2 par leurs valeurs déduites de l'équation de la courbe, il vient

$$(a^2 - b^2) (P^2 - P'^2) y^2 y'^2 = b^4 (P'^2 y'^2 - P^2 y^2);$$

d'où, enfin,

$$\frac{(P^2 - P'^2)(a^2 - b^2)}{b^4} = \frac{P'^2}{y'^2} - \frac{P^2}{y^2},$$

équation qui exprime la relation qui existe entre les poids P et P' , et les ordonnées y et y' des points correspondants à la position d'équilibre.

Un calcul entièrement analogue conduit, dans le cas de la parabole, à la condition

$$\frac{P^2 - P'^2}{P'^2} = \frac{P'^2}{y'^2} - \frac{P^2}{y^2}.$$

Cette relation peut aussi se déduire du résultat qui vient d'être obtenu pour l'ellipse. On pose, à cet effet,

$$a - \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{2}p, \quad \text{d'où} \quad b^2 = ap - \frac{p^2}{4}.$$

On aura alors

$$\frac{a^2 - b^2}{b^4} = \frac{a^2 - ap + \frac{p^2}{4}}{a^2 p^2 - \frac{ap^3}{2} + \frac{p^4}{16}};$$

divisant par a^2 , et posant $a = \infty$, cette dernière équation devient

$$\frac{a^2 - b^2}{b^4} = \frac{1}{p^2}, \quad \frac{p^2 - p'^2}{y^2} = \frac{p'^2}{y^2} - \frac{p^2}{r_1^2}.$$
