

ABEL TRANSON

**Sur la théorie des plans diamétraux dans
les surfaces du second ordre**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 182-184

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__182_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA THÉORIE DES PLANS DIAMÉTRAUX

Dans les surfaces du second ordre ;

PAR M. ABEL TRANSON.

Deux théories relatives aux plans diamétraux sont à peu près également répandues dans l'enseignement. L'une d'elles est sujette à des difficultés capables, ainsi que j'en ai l'expérience, d'embarrasser dans un examen les meilleurs élèves. C'est ce qui me décide à publier la présente Note.

Soient a, b, c les coordonnées du milieu de l'une des cordes parallèles à une direction donnée. Si l'on transporte l'origine en ce point, et qu'entre l'équation transformée de la surface et les équations d'une corde menée par cette nouvelle origine on élimine deux des variables, x et y par exemple, l'équation résultante du se-

cond degré en z devra manquer du terme du premier degré. En exprimant cette condition, on obtient une relation entre a, b, c qui n'est autre chose que l'équation du lieu cherché.

Cela est simple; mais voici les difficultés : la surface peut être de telle nature, que les cordes menées dans certaines directions ne la rencontrent qu'en un seul point, parce que la seconde rencontre passe à l'infini. Alors il ne semble pas qu'on puisse proposer la recherche d'un lieu diamétral; car s'il existe, ne doit-il pas se trouver tout entier à l'infini? Cependant le résultat de la méthode subsiste encore, et c'est encore un plan situé à une distance finie! Quelle est donc la signification géométrique d'un tel plan, et surtout quelle lumière pouvons-nous espérer à ce sujet d'une méthode qui, dans la circonstance actuelle, nous a fait transporter l'origine successivement dans une suite de points qui n'existent pas, ou au moins qui sont à l'infini?...

C'est pourquoi je trouve préférable la méthode donnée par Leroy dans son *Analyse appliquée à la Géométrie*, p. 81. Voici ce qu'il en est :

L'élimination de x et de y entre les équations générales de la corde mobile et l'équation de la surface donne une équation en z de la forme suivante

$$(1) \quad Rz^2 + Sz + T = 0.$$

L'équation obtenue en égalant à zéro la dérivée du premier membre de (1), c'est-à-dire l'équation

$$(2) \quad 2Rz + S = 0,$$

donnera la coordonnée z du milieu de la corde; et ensuite l'élimination des paramètres variables entre cette équation (2) et les équations de la corde mobile donnera le lieu cherché. D'ailleurs, on peut éviter toute élimination,

et obtenir immédiatement le résultat cherché en considérant, dans l'équation de la surface

$$F(x, y, z) = 0,$$

x et y comme étant des fonctions de z déterminées par les équations générales de la corde, et en égalant à zéro la dérivée de $F(x, y, z)$ calculée à ce point de vue.

On voit combien cette méthode est élégante; mais de plus elle éclaire parfaitement la difficulté que nous avons soulevée. Car dans la circonstance où les cordes dont on cherche les milieux ont une rencontre à l'infini, R est nul; et, par conséquent, l'équation (2) se réduit à $S = 0$; cela veut dire qu'on a écrit la condition pour que l'équation (1) ait sa seconde racine infinie comme la première. Donc le plan qu'on trouve en ce cas est *le lieu des points par où doivent passer des sécantes parallèles à la direction donnée pour que leurs rencontres avec la surface soient toutes les deux à l'infini.*

Et si l'on demande pourquoi un lieu ainsi défini se trouve, par son équation même, faire partie des plans diamétraux, ne pourra-t-on pas répondre que chaque point d'un tel plan est effectivement le milieu d'une corde dont les extrémités sont de part et d'autre infiniment distantes.