

H. RESAL

Note sur la loi des petites oscillations du pendule simple dans un milieu résistant

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19 (1860), p. 165-170

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__165_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur la loi des petites oscillations du pendule simple dans un milieu résistant ;

PAR M. H. RESAL,

Docteur ès Sciences, Officier de l'Instruction publique.

La recherche de la loi des petites oscillations du pendule, dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse, est une question qui fait partie du programme de la licence. La solution que Poisson en donne dans son *Traité de Mécanique* est assez compliquée et comporte deux méthodes, l'une pour le calcul de la décroissance des amplitudes, l'autre pour la détermination de la durée des oscillations.

Dans mes leçons à la Faculté des Sciences de Besançon de 1855 à 1859, j'ai donné la solution suivante qui me paraît plus simple que celle de Poisson, et dans laquelle un seul et même calcul conduit aux divers éléments du mouvement.

Nous prendrons pour origine du temps l'instant où le pendule vient de terminer l'une de ses oscillations et nous désignerons par α_0 la demi-amplitude correspondante.

Soient :

g l'accélération de la gravité ;

l la longueur du pendule ;

m la masse pesante qui le termine ;

α l'angle qu'il forme au bout du temps t avec la verticale : cet angle sera considéré comme positif ou négatif

selon que le pendule se trouvera ou non du même côté de la verticale de suspension qu'à l'instant initial;

$V = \mp \frac{ld\alpha}{dt}$ la vitesse correspondante de m .

La résistance éprouvée par m dans le milieu pourra être représentée par $mg \frac{V^2}{K^2}$, K étant une constante linéaire; et l'on aura d'après le principe des forces vives

$$\frac{1}{2} dV^2 = -g \sin \alpha dz + g \frac{V^2}{K^2} d\alpha.$$

Cette équation, linéaire en V^2 , permettra de déterminer V en fonction de α , et de ramener, à l'aide de la relation

$V = \mp \frac{ld\alpha}{dt}$, la recherche du temps à une quadrature,

quelle que soit d'ailleurs la grandeur des amplitudes et la nature du milieu; mais les formules auxquelles on arrive ainsi sont trop compliquées pour que l'on puisse bien se rendre compte de l'influence de la résistance du milieu sur le mouvement du pendule: aussi nous bornerons-nous à considérer le cas des petites oscillations, le seul qui sous le rapport de l'observation présente de l'intérêt.

Il résulte des faits tirés de l'observation que le coefficient de la résistance de l'air est très-petit, et que pour des vitesses aussi faibles que celles du pendule, on peut sans inconvénient en négliger le carré; ce qui revient, dans l'évaluation de cette résistance, à remplacer V^2 par sa valeur dans l'hypothèse du vide ou par $g(\alpha_0^2 - \alpha^2)$, en négligeant la quatrième puissance de α_0 et α . On trouve ainsi pour le travail total absorbé par la résistance de l'air

$$- mg^2 \frac{l^2}{K^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_0} (\alpha_0^2 - \alpha^2) d\alpha = \frac{1}{3} mg^2 \frac{l^2}{K^2} (\alpha_0 - \alpha)^2 (2\alpha_0 + \alpha);$$

le principe des forces vives donne par suite

$$\frac{1}{2} V^2 = \frac{1}{2} gl (\alpha_0^2 - a^2) - \frac{1}{2} g^2 \frac{l^2}{K^2} (\alpha_0 - \alpha) (2\alpha_0 + \alpha),$$

d'où

$$(1) \quad V = \sqrt{gl(\alpha_0 - \alpha) \left\{ (\alpha_0 + \alpha) \left[1 - \frac{2}{3} \frac{gl}{K^2} (\alpha_0 - \alpha) \right] - \frac{2}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha_0 (\alpha_0 - \alpha) \right\}}.$$

La demi-amplitude ascendante qui suit la demi-oscillation descendante correspondant à $V = 0$ est une racine négative de l'équation $V = 0$, qui, prise en valeur absolue, diffère de α_0 d'une quantité de l'ordre de $\frac{1}{K^2}$. Pour l'obtenir il suffit donc de poser

$$(2) \quad (\alpha_0 + \alpha) \left[1 - \frac{2}{3} \frac{gl}{K^2} (\alpha_0 - \alpha) \right] = \frac{2}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha_0 (\alpha_0 - \alpha).$$

Si l'on continue à négliger le carré de $\frac{gl}{K^2}$, on pourra remplacer dans le second membre de cette équation, α par $-\alpha_0$, supprimer le terme en $\frac{gl}{K^2}$ du coefficient de $\alpha_0 + \alpha$; et l'on obtient, en désignant par α_1 la demi-amplitude ascendante, ou la racine cherchée prise en valeur absolue,

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{4}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha_0^2;$$

on a de même pour les demi-amplitudes suivantes, α_1 , $\alpha_2 \dots$,

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{4}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha_1^2 = \alpha_0 - 2 \frac{4}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha_0^2,$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 - \frac{4}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha_2^2 = \alpha_0 - 3 \frac{4}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha_0^2;$$

.....

de sorte que les demi-amplitudes décroissent sensiblement en progression géométrique.

Le produit des racines de l'équation (2) étant

$$\frac{\alpha_0 - \frac{4}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha_0^2}{\frac{2}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha_0^2},$$

en le divisant par $-\alpha_1$, on obtient pour l'autre racine

$$\frac{-1}{\frac{2}{3} \frac{gl}{K^2}}$$

et V se met par suite sous la forme

$$v = \sqrt{gl(\alpha_0 + \alpha)(\alpha + \alpha_1) \left(\frac{2}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha + 1 \right)} = \mp \frac{ld\alpha}{dt},$$

d'où

$$dt = \mp \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\left(1 + \frac{2}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha \right)^{-\frac{1}{2}} d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha + \alpha_1)}} = \mp \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\left(1 - \frac{1}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha \right) d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha)(\alpha + \alpha_0)}},$$

et

$$t = \mp \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha)(\alpha_0 + \alpha_1)}} - \frac{1}{3} \frac{gl}{K^2} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha)(\alpha_0 + \alpha_1)}} \right\}.$$

Or

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha)(\alpha + \alpha_1)}} \\ &= \text{arc sin} \frac{\alpha - \frac{1}{2}(\alpha_0 - \alpha)}{\sqrt{\alpha_0 \alpha_1 + \left(\frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2} \right)^2}} - \text{arc sin} \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{\sqrt{\alpha_0 \alpha_1 + \left(\frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2} \right)^2}}, \end{aligned}$$

on peut négliger $\left(\frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}\right)$ devant $\alpha_0 \alpha_1$, et de plus on a avec la même approximation

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_0 \alpha_1}} = \frac{1}{\alpha_0} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{gl}{K^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1 + \frac{2}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha_0}{\alpha_0},$$

on peut donc prendre

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha)(\alpha + \alpha_1)}} \\ = -\arcsin \left[\frac{\alpha}{\alpha_0} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha_0\right) - \frac{2}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha_0 \right] - \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha)(\alpha + \alpha_1)}} = -\frac{1}{2} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d[-\alpha^2 + (\alpha_0 - \alpha_1)\alpha + \alpha_1 \alpha_0]}{\sqrt{-\alpha^2 + (\alpha_0 - \alpha_1)\alpha + \alpha_1 \alpha_0}} \\ + \frac{1}{2} (\alpha_0 - \alpha_1) \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha)(\alpha + \alpha_1)}},$$

mais comme cette expression se trouve multipliée par $\frac{gl}{K^2}$, il convient de négliger l'intégrale du second membre et de poser

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha)(\alpha + \alpha_1)}} = -\sqrt{(\alpha_0 - \alpha)(\alpha + \alpha_1)}.$$

Il vient donc pour l'expression du temps

$$(3) \quad t = \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - \arcsin \left[\frac{\alpha}{\alpha_0} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha_0\right) - \frac{2}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha_0 \right] \\ - \frac{1}{3} \frac{gl}{K^2} \sqrt{(\alpha_0 - \alpha)(\alpha + \alpha_1)} \end{array} \right\}.$$

En y supposant $\alpha = 0$, on a pour la durée de la première

oscillation descendante

$$\begin{aligned} \theta &= \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{2}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha_0 - \frac{1}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha_0 \right) \\ &= \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \frac{gl}{K^2} \alpha_0 \right). \end{aligned}$$

Pour avoir la durée de l'oscillation complète, on supposera $\alpha = -\alpha_0$ dans la formule (3), et l'on trouve, en négligeant le carré de $\frac{gl}{K^2}$, que cette durée est la même que

dans le vide ou $\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Il suit de là que la résistance de l'air augmente la durée de chaque demi-oscillation descendante, mais diminue de la même quantité la demi-oscillation ascendante suivante. De sorte que le nombre des oscillations exécutées dans un temps donné est, en raison du mode d'approximation adopté, très-sensiblement le même que dans le vide (*).
