

CHARLES KESSLER

**Solution de la question 504**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 19  
(1860), p. 162-165

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1860\\_1\\_19\\_\\_162\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__162_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SOLUTION DE LA QUESTION 504

(voir p. 43);

PAR M. CHARLES KESSLER,

Élève du Prytanée Militaire.

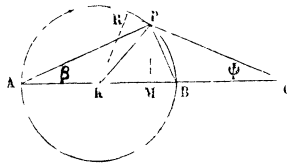
$AB = 2R =$  diamètre d'un cercle de centre  $K$ ,  $O$  un point sur le diamètre  $AB$ ,  $KO = a$ ,  $P =$  un point de la circonférence, angle  $PAB = \beta$ , angle  $POB = \psi$ . On a

$$\sin \psi = \frac{R \sin 2\beta}{\sqrt{(R-a)^2 \cos^2 \beta + (R+a)^2 \sin^2 \beta}},$$

$$\frac{2d\beta}{\sqrt{(R-a)^2 \cos^2 \beta + (R+a)^2 \sin^2 \beta}} = \frac{d\psi}{\sqrt{R^2 \cos^2 \psi + (R^2 - a^2) \sin^2 \psi}}.$$

Fonction elliptique.

JACOBI.



1°. Je mène  $PK$  et j'abaisse  $PM$  perpendiculaire sur  $AB$ ; je mène  $PB$  :

Triangle  $PKM$ . . . . .  $PM = R \sin 2\beta$ ,

Triangle  $POM$ . . . . .  $PM = OP \sin \psi$ ,

d'où

$$R \sin 2\beta = OP \sin \psi,$$

$$\sin \psi = \frac{R \sin 2\beta}{OP}.$$

Pour démontrer la proposition, il suffit donc de prouver d'abord que l'on a

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \sqrt{(\mathbf{R} - a)^2 \cos^2 \beta + (\mathbf{R} + a)^2 \sin^2 \beta} \\ &= \sqrt{4a\mathbf{R} \sin^2 \beta + (\mathbf{R} - a)^2}; \end{aligned}$$

or le triangle PBO

$$\begin{aligned} \overline{OP}^2 &= \overline{PB}^2 + \overline{BO}^2 - 2 \text{PB} \cdot \text{BO} \cos \widehat{\text{PBO}}, \\ \text{PB} &= 2\mathbf{R} \sin \beta, \quad \text{BO} = a - \mathbf{R}, \quad \widehat{\text{PBO}} = 90^\circ + \beta, \\ \overline{OP}^2 &= 4\mathbf{R}^2 \sin^2 \beta + (\mathbf{R} - a)^2 - 4\mathbf{R} \sin^2 \beta (\mathbf{R} - a) \\ &= 4\mathbf{R}a \sin^2 \beta + (\mathbf{R} - a)^2. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

$$\begin{aligned} 2^\circ. \quad & \frac{2d\beta}{\sqrt{(\mathbf{R} - a)^2 \cos^2 \beta + (\mathbf{R} + a)^2 \sin^2 \beta}} \\ &= \frac{d\psi}{\sqrt{\mathbf{R}^2 \cos^2 \psi + (\mathbf{R}^2 - a^2) \sin^2 \psi}}, \end{aligned}$$

ou

$$\frac{d\psi}{d\beta} = 2 \frac{\sqrt{\mathbf{R}^2 - a^2 \sin^2 \psi}}{\sqrt{(\mathbf{R}^2 - a^2) \cos^2 \psi + (\mathbf{R} + a)^2 \sin^2 \psi}}.$$

J'abaisse KR perpendiculaire sur OP, il faut prouver que

$$\frac{d\psi}{d\beta} = 2 \frac{\sqrt{\mathbf{R}^2 - \overline{\text{KR}}^2}}{\overline{\text{OP}}} = 2 \frac{\text{PR}}{\overline{\text{OP}}},$$

et comme

$$\text{PR} = \mathbf{R} \cos(2\beta + \psi), \quad \overline{\text{OP}} = \frac{\mathbf{R} \sin 2\beta}{\sin \psi},$$

il faut donc prouver que

$$\frac{d\psi}{d\beta} = 2 \frac{\cos(2\beta + \psi) \sin \psi}{\sin 2\beta} = \frac{2\mathbf{R} \cos(2\beta + \psi)}{\sqrt{(\mathbf{R} - a)^2 \cos^2 \beta + (\mathbf{R} + a)^2 \sin^2 \beta}}.$$

En effet la première équation

$$\sqrt{(\mathbf{R} - a)^2 \cos^2 \beta + (\mathbf{R} + a)^2 \sin^2 \beta} = \frac{\mathbf{R} \sin 2\beta}{\sin \psi},$$

étant dérivée, en regardant  $\psi$  comme fonction de  $\beta$   
on a

$$\frac{2(R+a)^2 \sin \beta \cos \beta - 2(R-a)^2 \sin \beta \cos \beta}{2\sqrt{(R-a)^2 \cos^2 \beta + (R+a)^2 \sin^2 \beta}}$$

$$= \frac{2R \cos 2\beta \sin \psi - R \sin 2\beta \cos \psi \frac{d\psi}{d\beta}}{\sin^2 \psi},$$

et comme

$$a \sin \psi = R \sin (2\beta + \psi),$$

$$2R \frac{-R \sin (2\beta + \psi) \sin 2\beta \sin \psi + \cos 2\beta \sin \psi \sqrt{(R-a)^2 \cos^2 \beta + (R+a)^2 \sin^2 \beta}}{R \sin 2\beta \cos \psi \sqrt{(R-a)^2 \cos^2 \beta + (R+a)^2 \sin^2 \beta}}$$

$$= \frac{d\psi}{d\beta},$$

ou

$$2R \frac{-\sin \psi \sin (2\beta + \psi) + \cos 2\beta}{OP \cos \psi} = \frac{d\psi}{d\beta},$$

$$\frac{2R}{\sqrt{(R-a)^2 \cos^2 \beta + (R+a)^2 \sin^2 \beta}}$$

$$\times \left[ \frac{\cos 2\beta}{\cos \psi} - \tan \psi \sin (2\beta + \psi) \right],$$

$$\frac{2R}{\sqrt{(R-a)^2 \cos^2 \beta + (R+a)^2 \sin^2 \beta}}$$

$$\times \left[ \frac{\cos 2\beta}{\cos \psi} - \tan \psi (\sin 2\beta \cos \psi + \cos 2\beta \sin \psi) \right],$$

$$\frac{2R}{\sqrt{(R-a)^2 \cos^2 \beta + (R+a)^2 \sin^2 \beta}}$$

$$\times \left( -\sin 2\beta \sin \psi + \frac{\cos 2\beta}{\cos \psi} - \sin^2 \psi \frac{\cos 2\beta}{\cos \psi} \right),$$

$$\frac{2R \cos (2\beta + \psi)}{\sqrt{(R-a)^2 \cos^2 \beta + (R+a)^2 \sin^2 \beta}} = \frac{d\psi}{d\beta}.$$

( 165 )

*Note du Rédacteur.* Dans l'énoncé du problème le point O est entre A et B.