

PAINVIN

## **Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 18 (1859), p. 49-60

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1859\\_1\\_18\\_\\_49\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__49_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

## APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir p. 33);

PAR M. PAINVIN,  
Docteur ès Sciences.

---

§ II. — *Conditions pour qu'un point soit intérieur à une surface du second ordre.*

37. Je dirai qu'un point est *intérieur à une surface du second ordre* lorsque de ce point on ne peut mener aucune tangente à la surface (\*).

---

(\*) Ainsi dans l'hyperboloïde à une nappe, il n'existe pas de points intérieurs. TM.

Soient  $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, \frac{\alpha_2}{\alpha_4}, \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$  les coordonnées d'un point fixe, et

$$(1) \quad \begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = 0, \\ n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4 = 0 \end{cases}$$

les équations d'une droite quelconque; on exprimera que cette droite passe par le point donné, en écrivant les équations

$$(2) \quad \begin{cases} m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + m_3 \alpha_3 + m_4 \alpha_4 = 0, \\ n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2 + n_3 \alpha_3 + n_4 \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que si une droite était tangente, le déterminant V est nul, et réciproquement (n° 35).

Nous exprimerons donc que le point  $\frac{x_1}{\alpha_4}, \frac{x_2}{\alpha_4}, \frac{x_3}{\alpha_4}$  est intérieur, en écrivant les conditions pour qu'il n'y ait aucune valeur des  $m_i, n_i$  qui puisse annuler le déterminant

$$(3) \quad V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

où

$$a_{r,s} = a_{,rs},$$

et en ayant égard toutefois aux relations (2).

Désignons par  $\varphi$  le premier membre de l'équation de la surface, par  $X_1, X_2, X_3, X_4$  ses demi-dérivées par rapport aux variables  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ; puis, par  $\varphi_0, A_1, A_2, A_3, A_4$  ces mêmes expressions dans lesquelles on aura remplacé  $x_1, x_2, x_3, x_4$  respectivement par  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ;

on aura les identités

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_{11} \alpha_1 + a_{12} \alpha_2 + a_{13} \alpha_3 + a_{14} \alpha_4 \\ \quad = a_{11} \alpha_1 + a_{21} \alpha_2 + a_{31} \alpha_3 + a_{41} \alpha_4 ; \\ A_2 = a_{21} \alpha_1 + a_{22} \alpha_2 + a_{23} \alpha_3 + a_{24} \alpha_4 \\ \quad = a_{12} \alpha_1 + a_{22} \alpha_2 + a_{32} \alpha_3 + a_{42} \alpha_4 ; \\ A_3 = a_{31} \alpha_1 + a_{32} \alpha_2 + a_{33} \alpha_3 + a_{34} \alpha_4 \\ \quad = a_{13} \alpha_1 + a_{23} \alpha_2 + a_{33} \alpha_3 + a_{43} \alpha_4 ; \\ A_4 = a_{41} \alpha_1 + a_{42} \alpha_2 + a_{43} \alpha_3 + a_{44} \alpha_4 \\ \quad = a_{14} \alpha_1 + a_{24} \alpha_2 + a_{34} \alpha_3 + a_{44} \alpha_4 ; \\ \varphi_0 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4. \end{array} \right.$$

38. Maintenant multiplions la quatrième ligne du déterminant V par  $\alpha_4$ , et ajoutons-y les trois premières multipliées respectivement par  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , il viendra, en ayant égard aux relations (2) et (4),

$$(5) \quad \alpha_4 V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Puis multiplions la quatrième colonne de ce dernier déterminant par  $\alpha_4$  et ajoutons-y les trois premières respectivement multipliées par  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , on obtiendra défini-

$$(6) \quad \alpha_4^2 V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A_1 & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & A_2 & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & A_3 & m_3 & n_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 & \varphi_0 & 0 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

En développant le second membre de l'identité (6), après avoir posé

$$(7) \quad \begin{cases} \gamma_1 = n_2 m_3 - n_3 m_2, \\ \gamma_2 = n_3 m_1 - n_1 m_3, \\ \gamma_3 = n_1 m_2 - n_2 m_1, \end{cases}$$

$$(8) \quad R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 & a_{12} & A_1 \\ a_{21} & a & a_{22} & A \\ a_{31} & a_2 & a_{32} & A \\ A_1 & A_2 & A & \varphi_0 \end{vmatrix}$$

on trouvera

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha_4^2 V = \frac{dR}{da_{22} da} \gamma_1^2 + \frac{d^2 R}{da_{13} da_{11}} \gamma_2^2 + \frac{d^2 R}{da_{11} da} \gamma_3^2 \\ - 2 \frac{d^2 R}{da_{11} da} \gamma_1 \gamma_2 - 2 \frac{d^2 R}{da_2 da_1} \gamma_1 \gamma_3 \\ - 2 \frac{d^2 R}{da da_{12}} \gamma_1 \gamma_2. \end{cases}$$

On voit, d'après les équations (7), que si l'on peut déterminer pour  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  des valeurs qui ne soient pas nulles toutes trois et qui annulent le second membre de l'équation (9), il en résultera toujours pour les  $m_i$ ,  $n_i$  une infinité de valeurs qui rendront la droite (1) tangente à la surface.

39. Avant de discuter l'équation (9), je vais indiquer plusieurs relations d'identité, dont la vérification est facile, et qui peuvent s'obtenir immédiatement en appliquant aux dérivées partielles du déterminant R la formule générale déjà citée

$$(10) \quad P \frac{d^2 P}{da_r da_{r_1}} = \frac{dP}{da_r} \frac{dP}{da_{r_1}} - \frac{dP}{da_{r_1}} \frac{dP}{da_r},$$

et en ayant égard à l'identité

$$(11) \quad \frac{d^2 P}{da_{rs} da_{r_1 s_1}} = - \frac{d^2 P}{da_{r_1 s_1} da_{r_1 s}}$$

(Brioschi, *Théorie des Déterminants*, p. 10).

Ces relations sont les suivantes :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 \frac{dR}{da_{33}} = \frac{d^2 R}{da_{33} da_{11}} \frac{d^2 R}{da_{33} da_{22}} - \left( \frac{d^2 R}{da_{33} da_{12}} \right)^2, \\ \varphi_0 \frac{dR}{da_{22}} = \frac{d^2 R}{da_{22} da_{11}} \frac{d^2 R}{da_{22} da_{33}} - \left( \frac{d^2 R}{da_{22} da_{13}} \right)^2, \\ \varphi_0 \frac{dR}{da_{11}} = \frac{d^2 R}{da_{11} da_{22}} \frac{d^2 R}{da_{11} da_{33}} - \left( \frac{d^2 R}{da_{11} da_{23}} \right)^2; \\ \varphi_0 \frac{dR}{da_{23}} = \frac{d^2 R}{da_{23} da_{11}} \frac{d^2 R}{da_{33} da_{21}} + \frac{d^2 R}{da_{22} da_{13}} \frac{d^2 R}{da_{33} da_{12}}, \\ \varphi_0 \frac{dR}{da_{13}} = \frac{d^2 R}{da_{13} da_{22}} \frac{d^2 R}{da_{33} da_{11}} + \frac{d^2 R}{da_{11} da_{23}} \frac{d^2 R}{da_{33} da_{12}}, \\ \varphi_0 \frac{dR}{da_{12}} = \frac{d^2 R}{da_{12} da_{33}} \frac{d^2 R}{da_{22} da_{11}} + \frac{d^2 R}{da_{22} da_{13}} \frac{d^2 R}{da_{11} da_{23}}. \end{array} \right.$$

PREMIÈRE HYPOTHÈSE.  $\frac{d^2 R}{da_{22} da_{33}}$  est différent de zéro.

40. L'équation (9) pourra s'écrire de la manière suivante, en formant le carré par rapport à la variable  $y_1$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{22} da_{33}} &= Y_1^2 + \left[ \frac{d^2 R}{da_{33} da_{22}} \frac{d^2 R}{da_{33} da_{11}} - \left( \frac{d^2 R}{da_{33} da_{12}} \right)^2 \right] y_2^2 \\ &\quad + \left[ \frac{d^2 R}{da_{33} da_{22}} \frac{d^2 R}{da_{11} da_{22}} - \left( \frac{d^2 R}{da_{22} da_{13}} \right)^2 \right] y_3^2 \\ &\quad - 2 \left[ \frac{d^2 R}{da_{22} da_{33}} \frac{d^2 R}{da_{11} da_{23}} + \frac{d^2 R}{da_{22} da_{13}} \frac{d^2 R}{da_{33} da_{12}} \right] y_2 y_3, \end{aligned}$$

où

$$Y_1 = \frac{d^2 R}{da_{22} da_{33}} y_1 - \frac{d^2 R}{da_{33} da_{12}} y_2 - \frac{d^2 R}{da_{22} da_{13}} y_3;$$

et si l'on a égard aux relations (12), elle prendra la forme définitive

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{22} da_{33}} \\ = Y_1^2 + \varphi_0 \left( \frac{dR}{da_{33}} \gamma_2^2 - 2 \frac{dR}{da_{23}} \gamma_2 \gamma_3 + \frac{dR}{da_{22}} \gamma_3^2 \right). \end{array} \right.$$

Nous distinguerons alors plusieurs cas.

41. PREMIER CAS.  $\frac{dR}{da_3}$  est différent de zéro.

Il viendra, en formant le carré par rapport à  $\gamma_2$ ,

$$\alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{22} da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \frac{dR}{da_{33}} Y_2 + \varphi_0 \frac{\frac{dR}{da_{22}} \frac{dR}{da_{33}} - \left( \frac{dR}{da_{23}} \right)^2}{\frac{dR}{da_{33}}} \gamma_3^2,$$

après avoir posé

$$\frac{dR}{da_{31}} Y_2 = \frac{dR}{da_{31}} \gamma_2 - \frac{dR}{da_{21}} \gamma_3.$$

Enfin, si l'on a égard à l'identité

$$(14) \quad R \frac{d^2 R}{da_{22} da_{33}} = \frac{dR}{da_{22}} \frac{dR}{da_{33}} - \left( \frac{dR}{da_{23}} \right)^2,$$

l'équation précédente s'écrira

$$(15) \quad \alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{22} da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \frac{dR}{da_{33}} Y_2 + \varphi_0 \frac{R \frac{d^2 R}{da_{22} da_{33}}}{\frac{dR}{da_{33}}} \gamma_3^2.$$

Or, pour que le second membre de cette équation ne puisse pas s'annuler, il faut et il suffit que tous les termes soient positifs, puisque le premier est essentiellement positif. En effet, il ne pourrait alors devenir nul

que pour  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ , ce qu'on ne saurait admettre, car, dans ce cas, les équations (1) et (2) seraient incompatibles; et l'on sait qu'il passe toujours une droite par un point donné.

Donc, pour que le point soit intérieur lorsque

$$\frac{d^2 R}{da_{22} da_{33}} \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{dR}{da_{33}} \geq 0,$$

il faut et il suffit qu'on ait :

$$1^o. \quad \varphi_0 \frac{dR}{da_{33}} > 0;$$

$$2^o. \quad R \frac{d^2 R}{da_{22} da_{33}} > 0.$$

42. SECOND CAS.  $\frac{dR}{da_{33}}$  est nul.

L'équation (13) donne alors

$$\alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{22} da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \left( \frac{dR}{da_{22}} y_3^2 - 2 \frac{dR}{da_{23}} y_2 y_3 \right);$$

ou, en ordonnant par rapport à  $y_3$ ,

$$(16) \quad \alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{22} da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \frac{dR}{da_{22}} Y_2^2 - \varphi_0 \frac{\left( \frac{dR}{da_{23}} \right)^2}{da_{22}} y_3^2.$$

Ici

$$\frac{dR}{da_{22}} Y_2 = \frac{dR}{da_{22}} y_3 - \frac{dR}{da_{23}} y_2.$$

On voit que le second membre de l'équation (16) contiendra toujours un terme négatif, tant que  $\frac{dR}{da_{23}}$  ne sera pas nul, et, par suite, il sera toujours possible de l'annuler.

Soit

$$\frac{dR}{da_{23}} = 0;$$

la relation (14) nous montre que  $R$  et  $\frac{dR}{da_{23}}$  sont nuls en même temps, puisqu'on a supposé  $\frac{d^2R}{da_{22} da_{33}}$  différent de zéro. L'équation (16) se réduit alors à

$$(17) \quad \alpha_4^2 V \frac{d^2R}{da_{22} da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \frac{dR}{da_{22}} Y_2^2.$$

Le point sera intérieur si,  $\frac{dR}{da_{22}}$  n'étant pas nul, le produit  $\varphi_0 \frac{dR}{da_{22}}$  est positif; si  $\frac{dR}{da_{22}}$  était nul, on pourrait évidemment annuler le second membre de l'équation (17).

Donc, pour que le point soit intérieur lorsque

$$\frac{d^2R}{da_{22} da_{33}} \geq 0$$

et

$$\frac{dR}{da_{33}} = 0,$$

il faut et il suffit qu'on ait :

$$1^\circ. \quad R = 0,$$

$$2^\circ. \quad \varphi_0 \frac{dR}{da_{22}} > 0.$$

SECONDE HYPOTHÈSE.  $\frac{d^2R}{da_{22} da_{33}}$  est nul et  $\frac{d^2R}{da_{11} da_{33}}$   
est différent de zéro.

43. L'équation (9) donne, en formant le carré par

rapport à  $y_2$ ,

$$\begin{aligned} & z_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{11} da_{33}} = Y_1^2 \\ & - \left( \frac{d^2 R}{da_{33} da_{12}} \right)^2 y_1^2 + \left[ \frac{d^2 R}{da_{11} da_{33}} \frac{d^2 R}{da_{11} da_{22}} - \left( \frac{d^2 R}{da_{22} da_{33}} \right)^2 \right] y_3^2 \\ & - 2 \left[ \frac{d^2 R}{da_{11} da_{33}} \frac{d^2 R}{da_{22} da_{13}} + \frac{d^2 R}{da_{33} da_{12}} \frac{d^2 R}{da_{11} da_{13}} \right] y_1 y_3 \end{aligned}$$

où

$$(18) \quad Y_1 = \frac{d^2 R}{da_{11} da_{33}} y_2 - \frac{d^2 R}{da_{33} da_{12}} y_1 - \frac{d^2 R}{da_{11} da_{23}} y_3;$$

et, en ayant égard aux relations (12),

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & z_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{11} da_{33}} \\ & = Y_1^2 + \varphi_0 \left( \frac{dR}{da_{33}} y_1^2 - 2 \frac{dR}{da_{13}} y_1 y_3 + \frac{dR}{da_{11}} y_3^2 \right). \end{aligned} \right.$$

Or, de la première des identités (12), il résulte que  $\varphi_0 \frac{dR}{da_{33}}$  est négatif; par conséquent, le second membre de l'équation (18) renfermera toujours un carré précédé du signe moins; et, par suite, ce second membre pourra toujours s'annuler tant que  $\frac{dR}{da_{33}}$  ne sera pas nul.

Soit donc

$$\frac{dR}{da_{33}} = 0,$$

d'où il suit (n° 12)

$$\frac{d^2 R}{da_{33} da_{12}} = 0,$$

et réciproquement; l'équation (18) devient

$$z_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{11} da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \left( \frac{dR}{da_{11}} y_3^2 - 2 \frac{dR}{da_{13}} y_1 y_3 \right)$$

ou bien encore

$$(19) \quad a_1^2 V \frac{d^2 R}{da_{11} da_{33}} = V_1^2 + \varphi_0 \frac{dR}{da_{11}} Y_2^2 - \varphi_0 \frac{\left(\frac{dR}{da_{13}}\right)^2}{\frac{dR}{da_{11}}} Y_1^2.$$

On voit que le second membre de cette dernière équation contiendra toujours un terme négatif tant que  $\frac{dR}{da_{13}}$  ne sera pas nul, et dès lors on pourra l'annuler.

Soit

$$\frac{dR}{da_{13}} = 0;$$

cette hypothèse jointe à

$$\frac{dR}{da_{33}} = 0,$$

et introduite dans la formule

$$(20) \quad R \frac{d^2 R}{da_{11} da_{33}} = \frac{dR}{da_{11}} \frac{dR}{da_{33}} - \left(\frac{dR}{da_{13}}\right)^2,$$

donne

$$(21) \quad R = 0;$$

et l'équation (19) se réduit à

$$(22) \quad a_1^2 V \frac{d^2 R}{da_{11} da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \frac{dR}{da_{11}} Y_2^2.$$

Le point sera intérieur si,  $\frac{dR}{da_{11}}$  n'étant pas nul, le produit  $\varphi_0 \frac{dR}{da_{11}}$  est positif; si  $\frac{dR}{da_{11}}$  était nul, on pourrait évidemment annuler le second membre de l'équation (22). Donc, pour que le point soit intérieur lorsque

$$\frac{d^2 R}{da_{22} da} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 R}{da_{11} da} \geq 0,$$

il faut et il suffit que :

$$1^{\circ}. \quad \frac{dR}{da_{33}} = 0,$$

$$2^{\circ}. \quad R = 0,$$

$$3^{\circ}. \quad \varphi_0 \frac{dR}{da_{11}} = 0.$$

### TROISIÈME HYPOTHÈSE.

$$\frac{d^2 R}{da_{22} da_{33}} = 0, \quad \frac{d^2 R}{da_{11} da_{33}} = 0, \quad \frac{d^2 R}{da_{11} da_{22}} \text{ différent de zéro.}$$

43. L'équation (9) donne, en ordonnant par rapport à  $\gamma_3$ ,

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} & \alpha_1^2 V \frac{d^2 R}{da_{11} da_{22}} \\ & = Y_1^2 - \left( \frac{d^2 R}{da_{22} da_{13}} \right)^2 \gamma_1^2 - \left( \frac{d^2 R}{da_{11} da_{23}} \right)^2 \gamma_2^2 \\ & - 2\gamma_1 \gamma_2 \left[ \frac{d^2 R}{da_{11} da_{22}} \frac{d^2 R}{da_{33} da_{12}} + \frac{d^2 R}{da_{22} da_{13}} \frac{d^2 R}{da_{11} da_{23}} \right]; \end{aligned} \right.$$

après avoir posé

$$Y_1 = \frac{d^2 R}{da_{11} da_{22}} \gamma_3 - \frac{d^2 R}{da_{22} da_{13}} \gamma_1 - \frac{d^2 R}{da_{11} da_{23}} \gamma_2.$$

Or les relations (12) conduisent à

$$\varphi_0 \frac{dR}{da_{22}} = - \left( \frac{d^2 R}{da_{22} da_{13}} \right)^2,$$

$$\varphi_0 \frac{dR}{da_{11}} = - \left( \frac{d^2 R}{da_{11} da_{23}} \right)^2;$$

ce qui montre que  $\varphi_0 \frac{dR}{da_{22}}$  et  $\varphi_0 \frac{dR}{da_{11}}$  sont négatifs.

On voit, d'un autre côté, qu'il sera toujours possible d'annuler le second membre de l'équation (23).

Ainsi, dans cette dernière hypothèse, le point ne saurait être intérieur.

### Résumé.

44. Si  $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, \frac{\alpha_2}{\alpha_4}, \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$ , sont les coordonnées d'un point, et si les quantités  $A_1, A_2, A_3, A_4, \varphi_0$  et  $R$  sont définies par les équations (4) et (8),

Pour que ce point soit intérieur, il faut et il suffit que :

1°. Si  $\frac{dR}{da_{33}} \geq 0$ , on ait (en même temps)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 \frac{dR}{da_{33}} > 0, \\ R \frac{d^2 R}{da_{22} da_{33}} > 0. \end{array} \right.$$

II°. Si  $\frac{dR}{da_{33}} = 0$ , il faut qu'on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{d'abord} \quad R = 0, \\ \text{puis} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 \frac{dR}{da_{22}} > 0, \quad \text{si} \quad \frac{d^2 R}{da_{22} da_{33}} \geq 0, \\ \text{ou} \\ \varphi_0 \frac{dR}{da_{11}} > 0, \quad \text{si} \quad \frac{d^2 R}{da_{22} da_{33}} = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Lorsque  $\varphi_0$  est nul, le point est sur la surface; dans toutes les autres circonstances, le point sera extérieur.

*La suite prochainement.*