

LE BESGUE

Remarques sur quelques séries

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18 (1859), p. 433-437

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__433_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REMARQUES SUR QUELQUES SÉRIES;

PAR M. LE BESGUE.

1. Sans être nouvelles, les remarques suivantes peuvent être utiles; il suffira donc de les exposer brièvement. Le terme général du développement de la puissance

$$(a + b + c + \dots)^m$$

est en posant

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = m \quad \text{et} \quad 1.2.3 \dots \alpha = \Pi \alpha;$$

$$\frac{\Pi m}{\Pi \alpha . \Pi \beta . \Pi \gamma \dots} a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$$

On sait que le coefficient $\frac{\Pi m}{\Pi \alpha . \Pi \beta . \Pi \gamma \dots}$ exprime le nombre des permutations des facteurs d'un produit où il y a α facteurs égaux entre eux, puis β autres aussi égaux entre eux, et ainsi de suite, le nombre total des facteurs étant m .

2. Il suit de là que les développements $(1 + 1)^m$, $(1 - 1)^m$ où les termes également distants des extrêmes sont égaux en valeur absolue, conduisent aux relations suivantes :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2^{2m+1}}{\Pi(2m+1)} = \frac{2}{\Pi(2m+1)} + \frac{2}{\Pi 1 . \Pi 2m} \\ + \frac{2}{\Pi 2 . \Pi(2m-1)} + \dots + \frac{2}{\Pi m . \Pi(m+1)}, \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{2}{\Pi(2m+1)} + \frac{2}{\Pi 1 . \Pi 2m} \\ + \frac{2}{\Pi 2 . \Pi(2m-2)} - \dots \pm \frac{2}{\Pi m . \Pi m+1}, \end{array} \right.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2^{2m}}{\Pi 2m} = \frac{2}{\Pi 2m} + \frac{2}{\Pi 1 \cdot \Pi (2m-1)} + \dots \\ + \frac{2}{\Pi (m-1) \cdot \Pi (m+1)} + \frac{1}{\Pi m \cdot \Pi m}, \end{array} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{2}{\Pi (2m)} - \frac{2}{\Pi 1 \cdot \Pi (2m-1)} \\ + \frac{2}{\Pi 2 \cdot \Pi (2m-2)} + \dots \pm \frac{1}{\Pi m \cdot \Pi m}; \end{array} \right.$$

relations qui vont servir pour établir quelques formules importantes.

3. Si l'on pose

$$(5) \quad x = 1 - \frac{u^2}{\Pi 2} + \frac{u^4}{\Pi 4} - \dots, \quad y = \frac{u}{\Pi 1} - \frac{u^3}{\Pi 3} + \frac{u^5}{\Pi 5} - \dots,$$

on en déduira

$$(6) \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Les formules (1), (2), (3) et (4) montrent de suite que le coefficient de chaque puissance de u dans $x^2 + y^2$ est égal à zéro.

Les formules (5) sont donc le sinus et le cosinus d'un certain arc de cercle. Or comme

$$dx = -y \cdot du, \quad dy = x \cdot du,$$

il en résulte

$$dx^2 + dy^2 = (x^2 + y^2) du^2,$$

ou bien

$$ds = du,$$

d'où $u = s$ en prenant convenablement l'origine des arcs et le sens dans lequel on doit les compter.

L'expression

$$du = \frac{dy}{x} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

donne encore

$$u = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

qu'il faudra prendre entre les limites $y=0$ et y positif < 1 .

4. Si l'on eût posé

$$(7) \quad x_1 = 1 + \frac{u^2}{\pi 2} + \frac{u^4}{\pi 4} + \dots, \quad y_1 = u + \frac{u^3}{\pi 3} + \frac{u^5}{\pi 5} + \dots,$$

on eût trouvé

$$(8) \quad x_1^2 - y_1^2 = 1.$$

x_1 et y_1 sont ce qu'on nomme *sinus* et *cosinus hyperboliques*, mais ici u n'est pas un arc de la courbe.

On a

$$dx_1 = y_1 du, \quad dy_1 = x_1 du;$$

$$du = \frac{dx_1}{y_1}$$

et

$$u = \int \frac{dx_1}{\sqrt{x_1^2 - 1}}.$$

5. Les sinus et cosinus hyperboliques s'expriment aisément par des exponentielles.

Si l'on considère l'expression

$$F(u) = 1 + \frac{u}{\pi 1} + \frac{u^2}{\pi 2} + \frac{u^3}{\pi 3} + \dots,$$

en formant le produit $F(u) \cdot F(v)$ et groupant les termes de même degré

$$\frac{u^i}{\pi i} + \frac{v}{\pi i} \frac{u^{i-1}}{\pi (i-1)} + \dots + \frac{v^i}{\pi i} = \frac{(u+v)^i}{\pi i},$$

on aura la relation

$$(9) \quad F(u) F(v) = F(u + v),$$

qui conduit de suite à

$$F(u)^2 = F(2u) \dots, \quad F(u)^m = F(mu);$$

et, par suite,

$$\sqrt[m]{F(u)} = F\left(\frac{u}{m}\right),$$

et encore

$$[F(u)]^{\frac{n}{m}} = F\left(\frac{n}{m}u\right).$$

Il faut bien remarquer que la fonction a^{ku} satisfait à la relation (9). D'après cela, si l'on pose

$$a^k = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots = e,$$

qui conduit à

$$k = \frac{\log e}{\log a},$$

quelle que soit la base du système de logarithme, on aura

$$a^{k\frac{n}{m}} = 1 + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)}{1} + \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2}{1.2} + \dots,$$

le sorte qu'en posant

$$k \frac{n}{m} = u,$$

on trouvera

$$a^u = 1 + \frac{\left(\frac{\log a}{\log e} u\right)}{1} + \frac{\left(\frac{\log a}{\log e} u\right)^2}{1.2} + \dots,$$

et pour $a = e$,

$$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} \dots$$

Or soit

$$e^u = x_1 + y_1,$$

$$z = x_1 - y_1,$$

il vient

$$z.e^u = x_1^2 - y_1^2 = 1 \quad \text{et} \quad z = e^{-u};$$

de là encore

$$x_1 = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad y_1 = \frac{e^u - e^{-u}}{2};$$

expressions des sinus et cosinus hyperboliques.

Comme

$$e^u = x_1 + \sqrt{x_1^2 - 1},$$

il en résulte

$$u = l(x_1 + \sqrt{x_1^2 - 1})$$

et

$$du = \frac{dx_1}{\sqrt{x_1^2 - 1}},$$

comme on l'a déjà vu.

6. L'expression du développement de a^x ,

$$y = a^x = 1 + \frac{\left(\frac{\log a}{\log e} x\right)}{1} + \frac{\left(\frac{\log a}{\log e} x\right)^2}{1.2} + \dots,$$

conduit à la dérivée de l'exponentielle; d'où l'on peut tirer, par le théorème des fonctions inverses, la dérivée de la fonction logarithmique. Cette marche, suivie par d'anciens auteurs, qui ont peut-être un peu négligé la rigueur, est plus directe que celle qui consiste à traiter d'abord la fonction logarithmique, puisque dans l'ordre naturel on passe des exponentielles aux logarithmes, et non des logarithmes aux exponentielles (*).

(*) Voir t. XIV, p. 151. TM.