NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Question d'examen (École polytechnique)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 389-390

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__389_0>

QUESTION D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE).

1. *Si la différence* m$^{\text{ième}}$ *d'une fonction* f(x) *est constante, la fonction est algébrique entière et du degré* m (*).

1°. *Lorsque la première différence d'une fonction* f(x) *est une quantité constante* c, *la fonction est entière et du premier degré.*

Soit h la différence constante de la variable; on aura, par hypothèse,

$$(1) \qquad f(x+h) - f(x) = c;$$

et, en égalant les dérivées, par rapport à x, des deux membres de l'équation (1), il viendra

$$f'(x+h) - f'(x) = 0 \quad \text{ou} \quad f'(x+h) = f'(x).$$

Cette dernière relation montre que la dérivée de $f(x)$ reste invariable quelle que soit la valeur substituée à x; donc, $f(x)$ est une fonction entière du premier degré.

2°. *Lorsque la première différence d'une fonction* f(x) *est un polynôme entier du degré* n, *la fonction est un polynôme entier du degré* (n + 1).

En effet, par hypothèse, on a

$$(2) \qquad f(x+h) - f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + R.$$

Puis, en prenant les dérivées de l'ordre $(n+1)$ par rapport à x,

$$f_{n+1}(x+h) - f_{n+1}(x) = 0,$$

(*) C'est la reciproque de cette proposition du Programme officiel : *La différence de l'ordre* m *d'une fonction entière du degré* m *est constante si la différence de la variable est elle-même constante.*

ou

$$f_{n+1}(x+h) = f_{n+1}(x);$$

d'où l'on conclura, comme précédemment, que la dérivée de l'ordre $(n+1)$ de $f(x)$ est constante, et que, par conséquent, $f(x)$ est une fonction entière du degré $(n+1)$.

Au moyen de ces deux remarques, il est facile d'établir la proposition (1). Car, d'après la première, si la différence $m^{ième}$ de $f(x)$ est constante, la différence $(m-1)^{ième}$ de' $f(x)$ est une fonction entière du premier degré. Donc (2°), la différence $(m-2)^{ième}$ sera une fonction entière et du second degré. Et ainsi de suite. G.