

FAURE

Transformation des propriétés métriques des figures

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 381-388

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__381_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

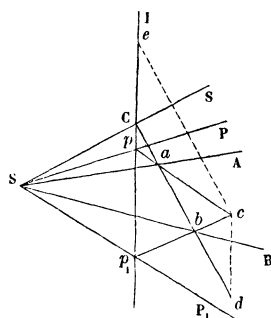
TRANSFORMATION DES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES FIGURES

(voir t. XVII, p 184);

PAR M. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

Transformation des relations de segments.

Transformer homographiquement la longueur d'un segment $a'b'$ d'une droite C' .



8 bis. Soient sur une droite C deux points a, b correspondants aux points a' et b' de la droite C' . Prenons sur la droite I les deux points p et p_1 qui correspondent à ceux de la première figure situés à l'infini sur les droites imaginaires $y' = \pm \sqrt{-1} x'$. Si l'on mène les

droites pa , p_1b , on formera un triangle abc qui sera l'homologue du triangle $a'b'c'$ de la première figure, construit d'après le lemme.

• On aura donc, d'après la relation d'aire (1) (t. XVII, p. 382),

$$a'b'c' = m \frac{abc}{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma},$$

α , β , γ étant les distances des sommets a , b , c à la droite I. Mais, d'après le lemme cité,

$$a'b'c' = \frac{\overline{a'b'}^2}{4\sqrt{-1}};$$

donc

$$\overline{a'b'}^2 = 4m\sqrt{-1} \frac{abc}{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}.$$

La longueur $a'b'$ se trouve ainsi transformée, et nous n'introduisons dans la seconde figure que deux nouveaux points p et p_1 . S'il se trouve un cercle dans la première figure, il lui correspond dans la seconde une conique, dont les points d'intersection avec la droite I sont nos points p et p_1 .

9. L'expression précédente peut se mettre sous une forme plus commode pour les applications. Menons la droite ce parallèle à C et cd parallèle à I. Les droites C et I se coupent au point C. On a

$$\frac{abc}{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma} = \frac{ab \cdot cl}{2Ca \cdot Cb \cdot ce \sin(C, I)};$$

or

$$\frac{cd}{ce} = \frac{Cp \cdot ac}{Ca \cdot cp} = \frac{Cp_1 \cdot bc}{Cb \cdot cp_1},$$

par suite

$$\frac{\overline{cd}^2}{\overline{ce}^2} = \frac{Cp \cdot Cp_1}{Ca \cdot Cb} \cdot \frac{ac \cdot bc}{cp \cdot cp_1} = \frac{Cp \cdot Cp_1}{Ca \cdot Cb} \cdot \frac{ab \cdot cd}{pp_1 \cdot ce};$$

donc

$$\frac{cd}{ce} = \frac{Ca \cdot Cp_1 \cdot ab}{Ca \cdot Cb \cdot pp_1},$$

et

$$\frac{abc}{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma} = \frac{\overline{ab}^2}{Ca^2 \cdot Cb^2} \frac{Cp \cdot Cp_1}{pp_1} \frac{1}{2 \sin^2 (C, I)}.$$

Si l'on pose

$$R^2 = \frac{2m \sqrt{-1} Cp \cdot Cp_1}{pp_1},$$

on aura

$$(1) \quad a' b' = R \frac{ab \sin (C, I)}{\alpha \cdot \beta}.$$

Première transformation.

Appelons π et π_1 les distances des points p et p_1 au segment ab ; on aura aussi

$$(2) \quad a' b' = \sqrt{\frac{2m \sqrt{-1}}{pp_1}} \frac{ab \sqrt{\pi \cdot \pi_1}}{\alpha \beta},$$

et, sous cette forme, nous dirons que *la longueur d'un segment d'une figure est égale à la longueur du segment correspondant divisée par le produit des distances de ses extrémités à une droite fixe I, multipliée par la racine carrée du produit des distances de deux points fixes de cette droite au segment et par une constante.*

La formule (1) peut s'écrire

$$(3) \quad a' b' = R \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right).$$

de sorte que si la distance β est infinie, on a

$$(3)' \quad a' b' = \frac{R}{\alpha};$$

dans ce cas le point b' est situé sur la droite I' .

On a aussi

$$(4) \quad a'b' = R \cdot \frac{ab}{Ca.Cb} \cdot \frac{1}{\sin(C, I)}.$$

Si l'on joint un point quelconque S aux points a' , b' , C par les droites A, B, S, on a

$$(5) \quad a'b' = R \frac{\sin(A, B)}{\sin(S, A) \sin(S, B)} \cdot \frac{1}{SC},$$

$$(6) \quad a'b' = R \frac{Sab}{SaC.SCb} \cdot \frac{SC}{2};$$

Sab indiquant l'aire du triangle Sab , etc.

On pourra prendre pour le point S l'un des points doubles.

10. La valeur de R^2 est affectée du signe $\sqrt{-1}$, mais on voit sans peine que l'imaginarité n'est qu'apparente; car si les constantes $a, b, c, \dots$, sont réelles, les points p et p_1 sont imaginaires, et par suite l'expression de pp_1 . Si au contraire ces points sont réels, il faut que les constantes a, b, c ou a', b' et c' soient imaginaires, et alors m le sera aussi.

11. On peut, au reste, faire disparaître le signe $\sqrt{-1}$ en introduisant dans la formule le milieu q du segment pp_1 et le point C_1 conjugué harmonique du point C relativement aux points p et p_1 . On a, en effet, les relations

$$\overline{pp_1} = 4 Cq.C_1q,$$

$$Cp.Cp_1 = Cq.CC_1;$$

d'où

$$R^2 = m CC_1 \sqrt{\frac{Cq}{qC_1}}.$$

12. Cas particuliers. 1°. La droite I est à l'infini.

On a ainsi le mode particulier d'homographie dans le-

quel à des droites parallèles dans l'une des figures correspondent des droites parallèles dans l'autre.

Soient dans la deuxième figure deux droites P, P_1 correspondant respectivement aux droites $y' = \pm \sqrt{-1} x'$ de la première. Le segment ab étant l'homologue du segment $a'b'$, menons ac parallèle à P , bc parallèle à P_1 ; le triangle abc correspond au triangle $a'b'c'$ du lemme, de sorte que si l'on a égard à la relation d'aire qui a lieu pour ce cas (6), on aura

$$\overline{a'b'}^2 = 4c'' \sqrt{-1} \left| \begin{array}{cc} a & b \\ a' & b' \end{array} \right| abc.$$

Cette relation fait voir qu'un théorème étant démontré dans le cas général (8), on aura celui qui lui correspond dans le cas actuel, en remplaçant par l'unité celles des distances $\alpha, \beta, \dots$ qui deviennent infinies.

2°. *Les droites imaginaires $y' = \pm \sqrt{-1} x'$ de la première figure coïncident avec leurs analogues.*

Si l'on appelle S le point d'intersection des droites P et P_1 qui correspondent aux droites imaginaires de la première figure, les lignes SC, SC_1 seront à angle droit, et Sq sera perpendiculaire sur I (il faut se rappeler que les droites $y = \pm \sqrt{-1} x$ forment un faisceau harmonique avec les deux côtés d'un angle droit).

Dans la valeur de R^2 (11) on peut donc, au rapport $\frac{Cq}{qC_1}$, substituer son égal $\frac{\overline{SC}^2}{\overline{SC_1}^2}$, et si l'on remarque, de plus, que $CC_1 \cdot Sq = SC \cdot SC_1$, on aura $R^2 = \overline{SC}^2 \frac{m}{Sq}$, de sorte que la formule (1) devient

$$a'b' = \sqrt{\frac{m}{Sq}} \cdot \frac{ab \cdot SC \sin(C, I)}{\alpha \cdot \beta};$$

le radical est ici constant.

Si l'on exprime analytiquement que les droites $y' = \pm \sqrt{-1} x'$ coïncident avec leurs homologues

$$a'x' + b'y' + c' = \pm \sqrt{-1} (ax + by + c),$$

on trouve les relations

$$a' = \pm b, \quad b' = \pm a, \quad c = c' = 0,$$

de sorte que les formules de transformations deviennent

$$x' = \frac{ax + by}{a''x + b''y + c''}, \quad y' = \frac{\mp bx \pm ay}{a''x + b''y + c''}.$$

Transformation des relations d'angles.

Transformer homographiquement les lignes trigonométriques d'un angle et l'angle lui-même.

13. Soient $a'b'c'$ un triangle, abc le triangle homographique

$$\sin a' = \frac{2a'b'c'}{a'b'.a'c'};$$

d'après nos relations d'aire et de segment, on a

$$a'b'c' = m \cdot \frac{abc}{\alpha.\beta.\gamma};$$

$$a'b' = \sqrt{\frac{2m\sqrt{-1}Cp.Cp_1}{pp_1}} \frac{ab}{Ca.Cb} \frac{1}{\sin(C, I)},$$

$$a'c' = \sqrt{\frac{2m\sqrt{-1}Bp.Bp_1}{pp_1}} \frac{ac}{Ba.bc} \frac{1}{\sin(B, I)};$$

dans ces formules, B et C indiquent les droites formant les côtés de l'angle a qui correspond à l'angle donné a' , nous désignons par les mêmes lettres les points où ces deux droites rencontrent la droite I.

Remplaçant dans l'expression de $\sin a'$, on obtient,

après simplification,

$$\sin a' = \frac{1}{2} \frac{BC \cdot pp_1}{\sqrt{-Cp \cdot Cp_1 \cdot Bp \cdot Bp_1}}.$$

Soit r le rapport anharmonique des points p, p_1, B, C ,

$$r = \frac{Cp}{Cp_1} : \frac{Bp}{Bp_1};$$

on pourra mettre la relation précédente sous la forme

$$\sin a' = \frac{1}{2} \frac{1-r}{\sqrt{-r}};$$

d'où l'on déduit aussi

$$\cos a' = \frac{1}{2} \frac{1+r}{\sqrt{r}} \quad \text{et} \quad \tan \frac{1}{2} a' = \frac{1-\sqrt{r}}{1+\sqrt{r}} \sqrt{-1}.$$

Ces formules serviront à transformer une quelconque des lignes trigonométriques d'un angle.

Si l'on veut transformer l'angle lui-même, on remarquera que les formules précédentes donnent

$$\cos a' - \sin a' \sqrt{-1} = \sqrt{r};$$

d'où

$$a' = -\frac{\log r}{2\sqrt{-1}},$$

relation très-élégante, due à M. Laguerre-Werly. On y parvient en cherchant le rapport anharmonique des droites B, C et $\gamma = \pm \sqrt{-1} x$.

Transformer homographiquement la distance d'un point c' à une droite C' .

14. Prenons deux points arbitraires a' et b' sur la droite C' , de manière à former le triangle $a'b'c'$. Désignant par h' la hauteur de ce triangle correspondant au

sommet c' ,

$$2 a' b' c' = a' b' . h' ;$$

d'où

$$h' = \frac{2 . a' b' c'}{a' b'} .$$

Soit abc le triangle homographique. On a

$$a' b' c' = m . \frac{abc}{\alpha . \beta . \gamma} ,$$

et, formule (7),

$$a' b' = \sqrt{\frac{2 m \sqrt{-1}}{pp_1}} . \frac{ab \sqrt{\pi . \pi_1}}{\alpha . \beta} ;$$

par suite ,

$$h' = \sqrt{\frac{m . pp_1}{2 \sqrt{-1}}} \frac{2 abc}{ab . \gamma \sqrt{\pi . \pi_1}} ,$$

et h désignant la distance du point c à la droite ab ou C ,

$$h' = \sqrt{\frac{m . pp_1}{2 \sqrt{-1}}} \frac{h}{\gamma \sqrt{\pi . \pi_1}} ;$$

dans cette relation γ exprime, comme précédemment, la distance du point c à la droite p, p_1 et π, π_1 sont les distances des points fixes p et p_1 à la droite C .

La distance d'un point à une droite est égale à la distance correspondante dans la figure homographique divisée par la distance du point qui correspond au point donné à la droite I, par la racine carré du produit des distances de deux points fixes de cette droite à la droite qui correspond à la droite donnée et multipliée par une constante.

(Les Applications prochainement.)