

Moyennes géométriques, arithmétiques, harmoniques comparées ; d'après M. Schlömilch

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 353-355

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__353_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**MOYENNES GÉOMÉTRIQUES, ARITHMÉTIQUES, HARMONIQUES
COMPARÉES ;**

D'APRÈS M. SCHLOMILCH.

ZEITSCHRIFT, 3^e année, 1858, p. 187.

1. Lemme. *n* étant entier positif et $\alpha > \beta$, on a

$$(n+1)\alpha^n > \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} > (n+1)\beta^n,$$

posons

$$\alpha = \frac{n+z}{n+1}, \quad \beta = 1, \quad z > 1,$$

alors

$$\alpha > \beta;$$

il vient

$$\left(\frac{n+z}{n+1} \right)^{n+1} - 1 > z - 1,$$

$$\frac{n+z}{n+1} > z^{\frac{1}{n+1}}.$$

Posons maintenant

$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{n+z}{n+1},$$

mais $z > 1$; de sorte que $\alpha > \beta$.

On a encore

$$\frac{n+z}{n+1} > z^{\frac{1}{n+1}}.$$

Ainsi cette inégalité subsiste pour toute valeur de z plus grande ou moins grande que l'unité, et cesse pour $z = 1$.

Faisons

$$z = \frac{y}{x^{\frac{1}{n}}};$$

on obtient, en remplaçant z par cette valeur,

$$(A) \quad nx^{\frac{1}{n}} + y > (n+1)(xy)^{\frac{1}{n+1}},$$

pourvu qu'on n'ait pas $x = y^n$.

2. THÉORÈME. *La moyenne arithmétique est toujours plus grande que la moyenne géométrique.*

Dans l'inégalité (A) faisons

$$n=1, \quad x=a, \quad y=b;$$

on a

$$a+b > 2\sqrt{ab};$$

d'où

$$a+b+c > 2\sqrt{ab} + c.$$

• Faisant

$$n = 2, \quad x = ab, \quad y = c,$$

on obtient

$$a + b + c > 3\sqrt{abc}.$$

Faisons

$$n = 3, \quad x = abc, \quad y = d;$$

on a

$$a + b + c + d > 4\sqrt{abcd}.$$

3. THÉORÈME. *La moyenne géométrique est plus grande que la moyenne harmonique.*

D'après le théorème précédent,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} [a_1 a_2 \dots a_n + a_1 a_1 \dots a_n + a_1 a_1 \dots a_n + \dots + a_1 a_1 a_3 \dots a_{n-1}] \\ & > a_1 a_2 a_3 \dots a_n)^{\frac{n-1}{n}}, \\ & \frac{1}{n} a_1 a_2 \dots a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) > (a_1 a_2 a_3 \dots a_n)^{\frac{n-1}{n}}; \end{aligned}$$

d'où

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)}.$$

le membre à droite est la *moyenne harmonique*; donc,

Observation. Les a sont essentiellement des quantités réelles positives.

4. Lorsque a_1 et a_2 sont deux imaginaires conjuguées, la moyenne arithmétique est moins grande que la moyenne géométrique, et celle-ci est moindre que la moyenne harmonique.

Observation. Ainsi, les théorèmes précédents ne peuvent s'appliquer qu'aux équations dont les racines sont réelles et positives.