

P. CHALLIOT

## **Solution de la question 427**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 18  
(1859), p. 336-339

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1859\\_1\\_18\\_\\_336\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__336_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

## SOLUTION DE LA QUESTION 427

( voir t. XVII, p. 45, n° 9 ) ;

PAR M. P. CHALLIOT,

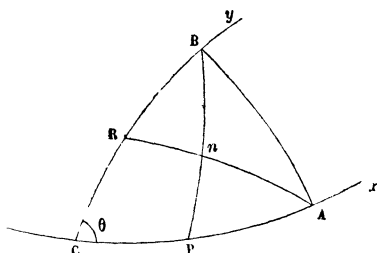
Élève du lycée de Versailles ( classe de M. Vannson ).

---

Si dans un triangle sphérique  $ABC$  on donne un angle  $C$  compris entre deux côtés variables, mais dont la somme des tangentes est constante, le lieu de la rencontre des trois hauteurs dans chaque triangle est une circonférence

de grand cercle ; si  $C'$  est la somme des côtés qu'on donne constante, le lieu sera une ellipse sphérique.

(VANNSON.)



1°. Prenons CB et CA de façon que

$$\text{tang}CB + \text{tang}CA = \text{tang}m;$$

menons deux des hauteurs BP et AR. Soient  $x, y$  les coordonnées sphériques d'un point  $n$  du lieu ; l'équation du grand cercle sera

$$\frac{\text{tang}x}{\text{tang}CP} + \frac{\text{tang}y}{\text{tang}BC} = 1 \quad (\text{voir t. XVII, p. 71}).$$

Pour abrégér, désignons les tangentes par une seule lettre. Posons

$$\begin{aligned} \text{tang}CA &= a, & \text{tang}CB &= b, \\ \text{tang}CP &= c, & \text{tang}CR &= d. \end{aligned}$$

L'équation du grand cercle BP sera alors

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1,$$

celle de l'arc AR sera

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{d} = 1.$$

Mais dans les deux triangles rectangles BCP, ACR, on a

$$c = b \cos \theta, \quad d = a \cos \theta;$$

les deux équations deviennent donc

$$\frac{x}{b \cos \theta} + \frac{y}{b} = 1,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a \cos \theta} = 1;$$

on en tire

$$b = \frac{y \cos \theta + x}{\cos \theta}, \quad a = \frac{x \cos \theta + y}{\cos \theta}.$$

D'après l'hypothèse, on a

$$a + b = m;$$

remplaçant  $a$  et  $b$  par leurs valeurs,

$$x + y = \frac{m \cos \theta}{1 + \cos \theta},$$

équation d'un grand cercle coupant les deux axes à une distance de l'origine marquée par  $\frac{m \cos \theta}{1 + \cos \theta}$ .

2°. Supposons que ce soit la somme des côtés qu'on donne constante,

$$a + b = m,$$

nous avons trouvé ci-dessus, en rétablissant les tangentes,

$$\operatorname{tang} b = \frac{\operatorname{tang} y \cos \theta + \operatorname{tang} x}{\cos \theta}, \quad \operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{tang} x \cos \theta + \operatorname{tang} y}{\cos \theta};$$

portant dans l'équation

$$\operatorname{tang} m = \frac{\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}{1 - \operatorname{tang} a \cdot \operatorname{tang} b},$$

on aura

$$\operatorname{tang} m = \frac{\frac{(\operatorname{tang} y + \operatorname{tang} x)(1 + \cos \theta)}{\cos \theta}}{1 - \frac{(\operatorname{tang} y \cos \theta + \operatorname{tang} x)(\operatorname{tang} x \cos \theta + \operatorname{tang} y)}{\cos^2 \theta}},$$

en désignant les tangentes par une seule lettre

$$m = \frac{(x+y)(1+\cos\theta)\cos\theta}{\cos^2\theta - xy(1+\cos^2\theta) - (x^2+y^2)\cos\theta},$$

équation du deuxième degré. Donc le lieu demandé est une ellipse sphérique.