

GARLIN

Note sur les sections toriques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18 (1859), p. 319-322

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__319_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES SECTIONS TORIQUES;

PAR M. GARLIN,
Docteur ès Sciences.

M. A. Serret a le premier fait connaître la véritable nature des sections toriques parallèlement à l'axe (*Journal de Mathématiques*, t. VIII, p. 495; 1843). Je vais parler ici d'une propriété qui ne se trouve consignée nulle part, à ce que je sache. Elle consiste en ce qu'en coupant un tore déterminé par un plan parallèle à l'axe, la courbe d'intersection est la même que celle qu'on obtient en cherchant le lieu géométrique des sommets des angles quelconques circonscrits à une certaine ellipse, dont il est facile de déterminer les éléments. Et réciproquement, la courbe du lieu des sommets des angles quelconques circonscrits à une ellipse déterminée peut être obtenue en coupant un tore dont on détermine les éléments par un plan dont on assigne la position.

Pour le faire voir, rappelons-nous que l'équation du tore est l'équation du quatrième degré

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - d)^2 + z^2 = R^2,$$

R étant le rayon de la surface génératrice, d la distance de son centre à l'axe de révolution, et l'origine des coordonnées le pied de la perpendiculaire abaissée de ce centre sur l'axe.

Soit

$$y = p$$

l'équation du plan sécant; la courbe d'intersection qui se projette en vraie grandeur sur le plan XZ a pour équation rationnelle dans ce plan

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + z^2)^2 + 2(p^2 - d^2 - R^2)x^2 + 2(p^2 + d^2 - R^2)z^2 \\ - 4d^2p^2 + (d^2 + p^2 - R^2)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Or la courbe relative aux sommets des angles α circonscrits à une ellipse dont les demi-axes sont a et b , a pour équation, en posant $\text{tang } \alpha = k$,

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + z^2)^2 - 2\left(a^2 + b^2 + \frac{2a^2}{k^2}\right)x^2 - 2\left(a^2 + b^2 + \frac{2b^2}{k^2}\right)z^2 \\ + (a^2 + b^2)^2 + \frac{4a^2b^2}{k^2} = 0. \end{array} \right.$$

Supposons d'abord qu'on connaisse a , b et α . Il s'agit d'abord de voir si par l'identification des équations (1) et (2) on peut trouver des valeurs réelles et finies pour les éléments d , R et p relatifs au tore et au plan sécant.

Les équations de l'identification sont

$$d^2 + R^2 - p^2 = a^2 + b^2 + \frac{2a^2}{k^2},$$

$$R^2 - d^2 - p^2 = a^2 + b^2 + \frac{2b^2}{k^2},$$

$$(p^2 + d^2 - R^2)^2 - 4d^2p^2 = (a^2 + b^2)^2 + \frac{4a^2b^2}{k^2}.$$

Retranchant la deuxième de ces équations de la première, on trouve

$$d^2 = \frac{a^2 - b^2}{k^2}.$$

Ainsi, en posant comme d'ordinaire

$$a^2 - b^2 = c^2,$$

la distance de l'axe de révolution au centre du cercle générateur est égale à $c \cot \alpha$.

La deuxième et la troisième équation donnent

$$p = \frac{b^2}{c \sin \alpha};$$

la position du plan sécant est ainsi déterminée.

D'ailleurs la première équation donne pour le rayon de la circonférence génératrice, en y substituant les valeurs déjà trouvées,

$$R = \frac{a^2}{c \sin \alpha}.$$

Réciproquement, le tore étant défini d'avance, ainsi que la position du plan sécant, les trois équations de l'identification servent à déterminer les dimensions de l'ellipse et l'angle α .

En particulier, si l'angle est droit, le tore est remplacé par la sphère, car $d = 0$, et les valeurs

$$p = \frac{b^2}{c}, \quad R = \frac{a^2}{c},$$

font connaître le rayon de cette sphère et la position du petit centre égal à celui du lieu géométrique.

L'équation (2) du quatrième degré à puissances paires n'est pas décomposable en général en facteurs du deuxième degré. On s'en assure en identifiant le premier membre au produit de deux polynômes du deuxième degré en x et y , et l'on voit que l'on n'a de coefficients réels pour ces polynômes que quand $a = b$, c'est-à-dire quand l'ellipse devient un cercle. Alors on trouve deux circonférences pour le lieu : l'une se rapporte à l'angle donné et l'autre à l'angle supplémentaire. C'est effectivement ce qu'on trouve quand on traite directement la question pour le

cercle. On peut encore démontrer l'impossibilité de la décomposition en facteurs, en résolvant l'équation par rapport à z , et cherchant alors la condition pour que la quantité placée sous le radical soit un carré parfait.

Note. Pour l'hyperbole équilatère, le lieu des sommets des angles égaux circonscrits est une cassinioïde (*).