Nouvelles annales de mathématiques

Burat

Bos

Solution de la question proposée au concours général pour la classe de mathématiques spéciales en 1858

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 282-292

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__282_1>

SOLUTION

De la question proposée au Concours général pour la classe de mathématiques spéciales en 1858

(voir p. 189) ;

PAR MM. BURAT ET BOS,
Professeurs de mathématiques au lycée de Lille.

K *étant un nombre donné et* α *un angle aussi donné, mais compris entre* 0 *et* 180 *degrés ;* g, G, h *étant des* *inconnues auxiliaires liées entre elles par les relations*

(1) $$G \sin g = -\sin\alpha,$$

(2) $$G \cos g = K \sin\alpha + \cos\alpha,$$

(3) $$h = \frac{G \sin^3\alpha}{K},$$

on demande les racines réelles de l'équation

(4) $$h \sin^4 x = \sin(x - \alpha).$$

On donnera à G *le même signe qu'à* K.

Pour résoudre cette équation, il faut d'abord remplacer h par sa valeur numérique calculée en fonction de α et de K : aussi nous commencerons par déduire ce coefficient des relations (1), (2), (3).

En ajoutant membre à membre les carrés des deux premières, g disparaît, et l'on a

$$G = \pm \sqrt{\sin^2\alpha + (K \sin\alpha + \cos\alpha)^2};$$

G est donc réel, quels que soient α et K, et le radical doit avoir, d'après l'énoncé, le même signe que K.

On peut aisément rendre cette valeur de G calculable par logarithmes : posons, en effet,

$$\tang\varphi = \frac{1}{K},$$

φ étant un angle auxiliaire; nous aurons

$$\begin{aligned} G &= \pm \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{\sin^2(\alpha + \varphi)}{\cos^2\varphi}} \\ &= \pm \sin\alpha \sqrt{1 + \frac{\sin^2(\alpha + \varphi)}{\sin^2\alpha \cos^2\varphi}}; \end{aligned}$$

et si l'on pose

$$\tang\psi = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin\alpha \cos\varphi},$$

ψ étant un deuxième angle auxiliaire, on aura

$$G = \pm \frac{\sin \alpha}{\cos \psi};$$

et, par suite,

$$h = \pm \frac{\sin^4 \alpha}{K \cos \psi}.$$

La valeur négative de h doit être rejetée, parce qu'il résulte des conditions de l'énoncé que h est positif.

Résolvons maintenant l'équation

$$h \sin^4 x = \sin(x - \alpha),$$

dans laquelle h et α sont des nombres connus. Je remarque d'abord que l'équation ne change pas quand on y remplace x par $x + 2n\pi$, n étant un nombre entier positif ou négatif. Il suffit donc de chercher les racines comprises entre o et 2π; quand elles seront connues, on aura toutes les autres en ajoutant aux premières un nombre quelconque de circonférences positives ou négatives.

L'équation proposée s'obtient en éliminant y entre les deux équations suivantes

$$(5) \qquad y = h \sin^4 x,$$
$$(6) \qquad y = \sin(x - \alpha);$$

par suite ses racines sont égales aux abscisses des points d'intersection des courbes que représentent ces équations (5) et (6).

Or l'équation (5) représente une courbe composée d'une infinité de branches situées toutes au-dessus de l'axe des x; chacune d'elles comprend un intervalle égal à π, et son ordonnée maximum, qui est égale à h, répond au milieu de cet intervalle. De plus, aux points où elle touche l'axe des x, la courbe a avec cet axe un contact du troisième ordre, parce que les trois premieres dérivées de $\sin^4 x$ s'annulent pour $x = n\pi$. Il est encore bon de remarquer que toutes les courbes (5), qui répondent aux diverses valeurs qu'on peut attribuer à h, s'obtiendront en multipliant par h les ordonnées de la courbe

$$y = \sin^4 x;$$

en sorte que pour des valeurs très-petites de ce coefficient, la courbe rampera en s'élevant très-peu au-dessus de l'axe des x, tandis que, pour des valeurs de h plus grandes, elle s'élèvera rapidement au-dessus de cet axe après avoir eu avec lui un contact très-intime. Enfin ces courbes ont toutes une infinité de points d'inflexion répondant aux mêmes abscisses

$$x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}:$$

car la dérivée seconde, égalée à zéro, donne l'équation

$$3 \sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x = 0,$$

qui est indépendante de h, et l'on en tire

$$\tan x = \pm \sqrt{3},$$

d'où

$$x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

Quant à l'équation (6), elle représente une sinusoïde ordinaire qui coupe l'axe des x à une distance de l'origine égale à α; si α varie, cette courbe se transporte parallèlement à elle-même le long de l'axe des x, sans changer de dimensions.

Dans chaque exemple particulier, on pourra tracer ces deux courbes, et leurs points de rencontre feront connaître les racines de l'équation (4). On voit immédiatement sur la figure (*) qu'il y aura toujours entre o et 2π

(*) La figure ci-jointe a été construite pour l'exemple numérique rapporté plus loin.

deux points d'intersection, mais qu'il peut toujours y en avoir deux autres pour des valeurs convenables de h et de α. Pour voir dans quel cas cette particularité se présente, nous allons d'abord chercher quelle relation doit exister entre h et α, pour que les courbes (5) et (6) soient tangentes.

Si X est l'abscisse du point de contact, H la valeur qu'il faut donner au coefficient h pour que les deux courbes se touchent, on devra avoir les deux équations

$$(7) \qquad \mathrm{H}\sin^4 \mathrm{X} = \sin(\mathrm{X} - \alpha),$$

$$(8) \qquad 4\mathrm{H}\sin^3 \mathrm{X}\cos\mathrm{X} = \cos(\mathrm{X} - \alpha);$$

j'obtiendrai la relation cherchée en éliminant X entre ces deux équations.

En les divisant membre à membre, on a

$$\operatorname{tang}\mathrm{X} = 4\operatorname{tang}(\mathrm{X} - \alpha),$$

d'où l'on tire

$$(9) \qquad \operatorname{tang}\mathrm{X} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16\operatorname{tang}^2\alpha}}{2\operatorname{tang}\alpha}.$$

Cette formule nous montre que le contact des deux courbes n'est possible que si l'on a

$$\operatorname{tang}^2\alpha < \frac{9}{16};$$

tang α doit donc être plus petit que $\frac{3}{4}$ ou plus grand que $-\frac{3}{4}$; l'angle dont la tangente est $\frac{3}{4}$ étant égal à $35^\circ 52' 11'',6$, α devra être compris entre 0° et $36^\circ 52' 11'',6$ ou bien entre $143^\circ 7' 48'',4$ et 180°.

Supposons cette condition remplie, et continuons l'élimination, on a

$$\sin^2\mathrm{X} = \frac{\operatorname{tang}^2\mathrm{X}}{1 + \operatorname{tang}^2\mathrm{X}}$$

et

$$\sin(X-\alpha)=\frac{\pm\,\mathrm{tang}(X-\alpha)}{\sqrt{1+\mathrm{tang}^2(X-\alpha)}}=\frac{\pm\,\mathrm{tang}\,X}{\sqrt{16+\mathrm{tang}^2X}};$$

en portant ces valeurs dans l'équation (7), on obtient

$$(10)\qquad H=\pm\frac{(1+\mathrm{tang}^2X)^2}{\mathrm{tang}^3X\sqrt{16+\mathrm{tang}^2X}};$$

le signe du radical sera déterminé par la condition que H soit positif.

Il suffirait maintenant de remplacer tang X par

$$\frac{3\pm\sqrt{9-16\,\mathrm{tang}^2\alpha}}{2\,\mathrm{tang}\,\alpha},$$

pour obtenir la relation cherchée entre H et α; mais cette relation serait compliquée de radicaux qui rendraient la discussion pénible, et il est préférable de conserver l'abscisse du point de contact comme variable auxiliaire.

En considérant d'abord le cas où α est compris entre o et $36^\circ 52' 11'',6$, nous voyons par les formules (9) et (10) qu'il y a pour chaque valeur de α deux points de contact et pour H deux valeurs h' et h''; il existe donc deux courbes

$$y=h'\sin^4 x,$$
$$y=h''\sin^4 x$$

qui touchent la sinusoïde; l'équation (9) montre que les abscisses des points de contact sont inférieures à $\frac{\pi}{2}$; et, de plus, si l'on suppose h' plus petit que h'', la courbe

$$y=h'\sin^4 x$$

touchera la sinusoïde intérieurement, tandis que la courbe

$$y=h''\sin^4 x$$

la touchera extérieurement (*). Pour des valeurs de h comprises entre h' et h'', il y aura trois points de rencontre entre o et π; pour toute autre valeur de h, il n'y aura entre les mêmes limites qu'un seul point d'intersection.

Lorsque α est compris entre $143^\circ\, 7'\, 48'',4$ et 180 degrés, on obtiendra également deux courbes tangentes à la sinusoïde en attribuant au coefficient h les deux valeurs h' et h''; l'une touchera intérieurement, l'autre extérieurement : seulement les abscisses des points de contact seront comprises entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π, au lieu d'être comprises entre o et $\frac{\pi}{2}$. Pour des valeurs de h comprises entre h' et h'', il y aura trois points de rencontre entre π et 2π, et pour toutes les autres valeurs de h, il n'y aura entre les mêmes limites qu'un seul point d'intersection.

Enfin si α est compris entre $36^\circ\, 52'\, 11'',6$ et $143^\circ 7' 48'',4$, les deux courbes n'auront que deux points d'intersection entre o et 2π.

Ces considérations géométriques conduisent à la règle suivante pour reconnaître dans chaque cas le nombre des racines réelles de l'équation

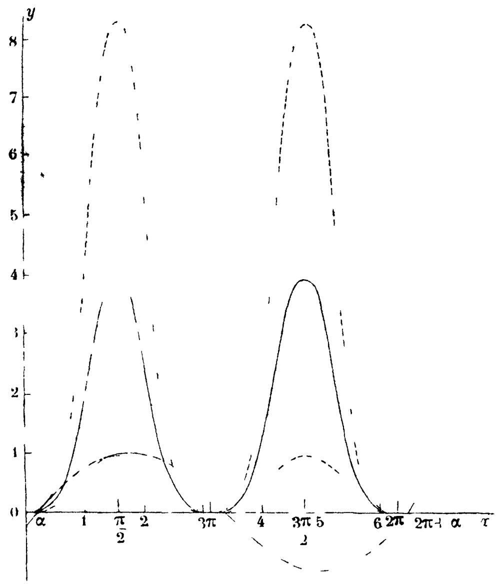
$$h \sin^4 x = \sin (x - \alpha).$$

(*) On voit facilement que si les deux valeurs de X étaient egales, H prendrait la valeur $\frac{5\sqrt{5}}{16}$ et qu'alors la courbe aurait avec la sinusoïde un contact du deuxième ordre, c'est-à-dire qu'elle la couperait au point de contact; on démontre en outre que si les deux valeurs de tang X sont inégales, h' est plus petit que $\frac{5\sqrt{5}}{16}$ et h'' est plus grand que $\frac{5\sqrt{5}}{16}$. Comme en même temps la sinusoïde s'est déplacée vers la gauche, il résulte nécessairement de la forme et de la disposition des deux courbes que la courbe $y = h' \sin^4 x$ ne pourra toucher la sinusoide qu'à l'intérieur, tandis que la courbe $y = h'' \sin^4 x$ ne pourra la toucher qu'à l'extérieur. D'autres considérations pourraient conduire à ce resultat, qui est d'ailleurs evident quand on se rend bien compte de la nature des deux courbes.

Si α est compris entre $36^\circ 52' 11'',6$ et $143^\circ 7' 48'',4$, l'équation n'a que deux racines réelles comprises entre o et 2π.

Si α est inférieur à $36^\circ 52' 11'',6$ ou supérieur à $143^\circ 7' 48'',4$, on calculera $\tang X$ au moyen de la formule (9); on obtiendra pour cette quantité deux valeurs qui, portées dans l'équation (10), détermineront deux valeurs de H, h' et h''; si le coefficient numérique h de l'équation proposée est compris entre ces deux nombres, cette équation admet quatre racines comprises entre o et 2π; dans le cas contraire, elle n'en admet que deux. Lorsque h est égal à h' ou à h'', deux des quatre racines deviennent égales, et l'équation n'a plus entre o et 2π que trois racines distinctes; dans ce cas particulier, la racine double est fournie par l'équation (9).

Les considérations géométriques qui précèdent permettent de plus de séparer facilement les racines dans tous les cas; par exemple, lorsque h est compris entre h' et h'' et que l'angle α est plus petit que $36^\circ 52' 11'',6$, on voit sur la figure que la première racine est un peu supérieure à α; la deuxième est comprise entre la précédente et $\frac{\pi}{2}$, la troisième entre $\frac{\pi}{2}$ et π, et la quatrième est un peu supérieure à $\pi + \alpha$.



La figure représente :

1°. La sinusoïde, largement ponctuée;

2°. La courbe

$$y = h \sin^4 x,$$

tracée en trait plein;

3°. Les deux courbes

$$y = h' \sin^4 x,$$
$$y = h'' \sin^4 x,$$

tracées en pointillé; ces deux courbes touchent la sinusoïde.

Elle permet de voir les contacts des deux courbes

$$y = h' \sin^4 x,$$
$$y = h'' \sin^4 x$$

avec la sinusoïde

$$y = \sin(x - \alpha),$$

et les deux premiers points d'intersection de la courbe

$$y = h \sin^4 x$$

avec cette même sinusoïde.

Dans cette figure, on a

$$\alpha = 13^\circ 40' 4'',1,$$
$$h = 3,978539,$$

et, par suite,

$$h' = 0,96196,$$
$$h'' = 8,2865.$$

On rencontre cette équation en astronomie, quand on se propose de déterminer l'orbite d'une planète au moyen de trois observations seulement. Au commencement de ce siècle, Gauss donna la solution de ce problème et appliqua ses formules au calcul des orbites des petites planètes comprises entre Mars et Jupiter, et découvertes depuis 1801. La méthode du célèbre astronome de Göttingue est exposée dans un ouvrage intitulé : *Theoria motus corporum cœlestium in sectionibus conicis solem ambientium*, auctore Carolo-Friderico Gauss, Hamburgi, 1809. On y trouve l'exemple suivant (p. 167) relatif à la planète Junon, et que Delambre a reproduit dans son *Astronomie*, t. II, p. 577 :

$$3,978539 \sin^4 x = \sin(x - 13^\circ 40' 4'',1).$$

Cette équation a quatre racines réelles comprises entre 0 et 2π; car les formules (9) et (10) donnent dans ce cas

$$h' = 0,96196,$$
$$h'' = 8,2865,$$

et le coefficient de $\sin^4 x$ est compris entre ces deux nombres; dès lors ces quatre racines se séparent facilement : la première est voisine de $13^\circ 40' 4'',1$ et un peu supérieure à cette valeur; la deuxième est comprise entre $13^\circ 40' 4'',1$ et 90 degrés, la troisième entre 90 et 180 degrés; et la quatrième entre 180 degrés et $193^\circ 40' 4'',1$.

Ces quatre racines se calculent facilement en appliquant la méthode ordinaire qui sert à la résolution des équations transcendantes; d'ailleurs l'équation donnée est l'une de celles que M. Joseph Bertrand a résolues dans son *Traité d'Algèbre* (2e édit., p. 394). Nous y renvoyons le lecteur.

Les quatre racines positives inférieures à 360 degrés sont

$$\begin{aligned} x_1 &= 14^\circ.35'.\ 5'', \\ x_2 &= 32.\ 2.28, \\ x_3 &= 137.27.39, \\ x_4 &= 193.\ 4.13; \end{aligned}$$

par conséquent toutes les racines réelles de l'équation sont données par les formules

$$\begin{aligned} x &= 360^\circ \times n + 14^\circ.35'.\ 5'', \\ x &= 360 \times n + 32.\ 2.28, \\ x &= 360 \times n + 137.27.39, \\ x &= 360 \times n + 193.\ 4.13, \end{aligned}$$

dans lesquelles n représente un nombre entier quelconque positif ou négatif.

Note. Dans les équations données par Gauss on n'a pas $h = \frac{G \sin^3 \alpha}{k}$, mais $h = \frac{k}{G \sin^2 \alpha}$ (*voir* p. 157 du *Theoria*). M. le professeur Dieu a traduit cet ouvrage, mais ne trouve pas d'éditeur. TM.