

BOUTERG

Solution de la question 461

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 242-247

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__242_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 461

(voir t. XVIII, p. 46);

PAR M. BOUTERG (DE CLERMONT).

Démontrer que la série

$$\frac{1}{1.2.3\dots n} + \frac{1}{2.3\dots(n+1)} + \frac{1}{3.4\dots(n+2)} \dots$$

est convergente et a pour limite

$$\frac{1}{(n-1).1.2.3\dots n-1}.$$

Ce qui donne la formule

$$\frac{1}{A_n^n} + \frac{1}{A_n^{n+1}} + \frac{1}{A_n^{n+2}} + \dots = \frac{1}{(n-1) A_{n-1}^{n-1}},$$

en désignant par A_n^{n+1} le nombre des arrangements de $n+1$ lettres n à n .

Lemme. On a identiquement

$$\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ac}{b(b-c)},$$

donc on peut poser la série des identités suivantes :

$$\frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1},$$

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n+1-2} = \frac{1}{n+1} + \frac{1.2}{(n+1)(n+1-2)},$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1.2}{(n+1)(n+1-2)} = \frac{1.2}{(n+1)(n+2-3)} = \frac{1.2}{(n+1)(n+2)} \\
& + \frac{1.2.3}{(n+1)(n+2)(n+2-3)}, \\
& \dots\dots\dots \\
& \frac{1.2.3\dots k-1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k-2)(n+k-2-k+1)} \\
& = \frac{1.2.3\dots(k-1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k-2)[n+k-1-k]} \\
& = \frac{1.2.3\dots k-1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)} \\
& + \frac{1.2.3\dots k}{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)[n-1]}.
\end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre toutes ces égalités, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n-1} &= 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1.2}{(n+1)(n+2)} + \dots \\
&+ \frac{1.2.3\dots k-1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)} + R,
\end{aligned}$$

R étant donné par la relation

$$R = \frac{1.2.3\dots k}{(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)(n-1)}.$$

Je vais prouver que R tend vers zéro lorsque k augmente indéfiniment. Prenons une valeur de k déjà grande et supérieure au nombre n , dont la valeur est finie et déterminée. Posons

$$k = n + l,$$

l pouvant croître indéfiniment. Nous aurons

$$R = \frac{1.2\dots n(n+1)(n+2)\dots(n+l)}{(n+1)(n+2)\dots(n+l)[k+1][k+2]\dots[k+n-1](n-1)};$$

on aperçoit alors une réduction qui, effectuée, conduit à

$$R = \frac{1 \cdot 2 \dots n}{(k+1)(k+2) \dots (k+n-1)(n-1)};$$

d'où l'on voit que si k augmente indéfiniment, R tend vers zéro; donc on a

$$\frac{n}{n-1} = \lim \left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1 \cdot 2}{(n+1)(n+2)} + \dots \right].$$

Théorème. La démonstration du théorème qui constitue la question n'offre plus de difficulté, car en nommant S la série, on a

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1 \cdot 2}{(n+1)(n+2)} + \dots \right].$$

La parenthèse est une série convergente, qui a pour limite $\frac{1}{n-1}$; donc enfin la série donnée est convergente et a pour limite

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)}.$$

C. Q. F. D.

Note du Rédacteur.

M. Léon Brault, élève de l'Institution Barbet, remarque que

$$\begin{aligned} \frac{n}{n-1} &= 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1 \cdot 2}{(n+1)(n+2)} \\ &\quad + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(n+1)(n+2)(n+3)} \dots \end{aligned}$$

(Catalan, *Algèbre, Manuel des Candidats*, p. 62, et *Nouvelles Annales*, t. XV, p. 257.)

En divisant les deux membres par $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$, on obtient

$$\frac{1}{(n-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n-1} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n+1} + \dots$$

M. Rouquet, régent au collège de Castres, remarque que

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{1^n}; \quad \frac{1}{n+1!} < \frac{1}{2^n}; \quad \frac{1 \cdot 2}{n+2!} < \frac{1}{3^n};$$

or lorsque $n > 1$, la série $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots$ est convergente; donc la série donnée est convergente.

M. Aubert, professeur, remarque que dans l'énoncé de la question, le résultat précédent conduit à la formule

$$\frac{1}{A_n} + \frac{1}{A_{n+1}} + \frac{1}{A_{n+2}} + \dots = \frac{1}{(n-1) A_{n-1}},$$

dans laquelle A_n^{n+1} représente le nombre des arrangements de $(n+1)$ lettres n à n .

Il peut servir également à démontrer la suivante :

$$(2) \quad \frac{1}{C_n^n} + \frac{1}{C_{n+1}^{n+1}} + \frac{1}{C_{n+2}^{n+2}} + \dots = n \cdot \frac{1}{(n-1) C_{n-1}^{n-1}} \quad (*)$$

C_n^{n+1} désigne le nombre des combinaisons de $(n+1)$ lettres n à n .

Il suffit, en effet, de multiplier chacun des termes de la série (1) par le facteur $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$; elle devient alors

$$(3) \quad \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n+1)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (n+2)} + \dots,$$

dont les termes sont respectivement égaux à ceux du premier membre de la formule (2).

Il est d'ailleurs évident, d'après ce qui précède, que la série (3) a pour limite

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{(n-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} = n \frac{1}{(n-1) C_{n-1}^{n-1}},$$

(*) Ce que démontre également M. Puget, élève du lycée de Caen.

la limite de la série (1) permet encore d'obtenir très-simplement celle de la série

$$(4) \quad 1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1 \cdot 2}{(m+1)(m+2)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \dots,$$

donnée parmi les Exercices du *Manuel des Candidats à l'École Polytechnique*, de M. Catalan (p. 62), et *Nouvelles Annales* (t. XV, p. 257).

Il est facile de voir que la série (4) peut être mise sous la forme

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}{2 \cdot 3 \dots m (m+1)} \\ + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}{3 \cdot 4 \dots (m+1)(m+2)} + \dots; \end{array} \right.$$

elle est alors identique avec la série (3), et par suite a pour limite $\frac{1}{m-1}$; résultat indiqué par M. Catalan.

L'identité des séries (2) et (4) et de leurs limites peut s'apercevoir à priori.

En adoptant pour toutes deux la même notation, la série (2) s'écrira

$$\frac{1}{C_m^m} + \frac{1}{C_m^{m+1}} + \frac{1}{C_m^{m+2}} + \dots,$$

et la série (4),

$$\frac{1}{C_0^m} + \frac{1}{C_1^{m+1}} + \frac{1}{C_2^{m+2}} + \dots$$

Or, on sait que l'on a généralement

$$(6) \quad \frac{1}{C_m^{m+p}} = \frac{1}{C_p^{m+p}};$$

d'où résulte l'identité des termes respectifs des deux séries.

Il faut convenir, toutefois, que $C_0^m = 1$. Convention conforme à ce qu'on déduit de la relation (6), en y faisant $p = 0$.

MM. Challiot, élève du Lycée de Versailles, Gérard, élève de l'école des Carmes, Émile Duclos, trouvent la limite aussi par décomposition, mais ne démontrent pas directement la convergence.