

J. DE VIRIEU

Sur la série de Schwab

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 234-237

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__234_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA SÉRIE DE SCHWAB;

PAR J. DE VIRIEU,

Régent à Saumur.

1. Dans une note ajoutée à un article de M. Farcy (*Nouvelles Annales*, t. III, p. 582), M. le Rédacteur s'exprime ainsi :

« Il serait intéressant de trouver la limite de la série » de Schwab par un moyen direct (p. 585). »

Cette limite se déduit du théorème suivant :

Soit une série illimitée

(A) $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n+2}, a_{3n+3},$

où le premier terme étant nul ou positif et le deuxième plus grand que le premier, chaque terme *impair* est moyen *arithmétique*, chaque terme *pair* est moyen *géométrique* entre les deux termes qui le précèdent immédiatement; les termes impairs forment une série croissante, les termes impairs une série décroissante.

Ces deux dernières séries ont une même limite qui est la limite de la série (A). Cette limite est égale au double de l'inverse du plus petit des arcs qui, dans une circonférence dont le rayon est $\frac{1}{\sqrt{a_1^2 - a_0^2}}$ sont sous-tendus par une corde égale à $\frac{2}{a_1}$. C'est ce que nous allons démontrer.

2. Les termes de la série (A) se déduisent des deux premiers au moyen des formules

$$(B) \quad a_{2n+2} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n}}{2}, \quad a_{2n+3} = \sqrt{a_{2n+2} a_{2n+1}}.$$

3. Soit R le rayon d'une circonférence, U un arc de cette circonférence plus petit que le quadrant, R, U étant des quantités déterminées par

$$a_0 = \frac{1}{R} \cot \left(\frac{U}{R} \right), \quad a_1 = \frac{1}{R} \operatorname{cosec} \left(\frac{U}{R} \right).$$

En désignant par φ un angle compris entre 0 et $\frac{1}{2} \pi$, on a

$$a_0 = \frac{1}{R} \cot \varphi, \quad a_1 = \frac{1}{R} \operatorname{cosec} \varphi, \quad U = R \varphi,$$

$$\cos \varphi = \frac{a_0}{a_1}; \quad \sin \varphi = \frac{1}{a_1} \sqrt{a_1^2 - a_0^2}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 - a_0^2}}.$$

4. Les formules (B) donnent de suite

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R} \cot \left(\frac{1}{2} \varphi \right), \quad a_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R} \operatorname{cosec} \left(\frac{1}{2} \varphi \right).$$

On en déduit d'abord par induction

$$(1) \quad a_{2n} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{2^n} \cot \left(\frac{1}{2^n} \varphi \right),$$

$$(2) \quad a_{2n+1} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{2^n} \operatorname{cosec} \left(\frac{1}{2^n} \varphi \right),$$

formules dont la généralité est ensuite démontrée, en faisant voir au moyen des formules (B), que si elles sont vraies pour $n = \nu$, elles le sont également pour $n = \nu + 1$.

Les formules (1) et (2) donnent

$$(3) \quad a_{2n+1} - a_{2n} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{2^n} \tan \left(\frac{1}{2^{n+1}} \varphi \right).$$

5. Les formules (1), (2), (3) peuvent s'écrire ainsi qu'il suit :

$$(4) \quad a_{2n} = \frac{\left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{U}{R} \right)}{\tan \left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{U}{R} \right)} \cdot \frac{1}{U},$$

$$(5) \quad a_{2n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{U}{R} \right)}{\sin \left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{U}{R} \right)} \cdot \frac{1}{U},$$

$$(6) \quad a_{2n+1} - a_{2n} = \left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{U}{R} \right) \tan \left(\frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{U}{R} \right) \times \frac{1}{U}.$$

Sous cette forme, elles montrent que, en faisant tendre n vers l'infini, a_{2n} croît constamment, a_{2n+1} décroît constamment; $a_{2n+1} - a_{2n}$ décroît constamment et indéfiniment.

De plus la limite de la série (A) est $\frac{1}{U}$ ou $\frac{2}{2U}$.

Or $2U$ est le plus petit des arcs qui dans une circonférence de rayon $\frac{1}{\sqrt{a_1^2 - a_0^2}}$ ont pour corde $R \times 2 \sin \varphi$ ou $\frac{2}{a_1}$; ce qui démontre le théorème énoncé au commencement de cet article.

La série de Schwab se déduit de la série (A) en posant

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1,$$

(237)

on a

$$2U = \pi$$

et pour limite $\frac{2}{\pi}$.
