FAURE

Transformation des propriétés métriques des figures

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 181-184

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__181_0>

TRANSFORMATION DES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES FIGURES

(voir t. XVII, p. 381);

PAR M. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

Considérons dans la première figure un polygone formé par les droites A', B', C', D',..., F'. Si l'on trace une droite arbitraire P' dans le plan du polygone, son aire S' est donnée par le relation

$$S' = A'B'P' + B'C'P' + C'D'P' + \ldots + F'A'P';$$

dans la figure homographique nous aurons un polygone formé des droites A, B, C, D,..., F et une droite P, et, d'après la relation (1), on aura

$$S = m \cdot \left(\frac{A.B.P}{\pi_1} + \frac{B.C.P}{\pi_2} + \ldots\right),$$

π_1, π_2 représentent le produit des distances des sommets des triangles ABP, BCP,..., à la droite.

1. L'égalité précédente montre que *si l'on trace dans le plan d'un polygone une droite quelconque, la somme des triangles formés par deux côtés consécutifs du polygone et la droite arbitraire, divisés respectivement par le produit des distances de leurs sommets à une droite fixe, est une quantité constante.*

Lorsque la droite arbitraire sera à l'infini, la relation (3) pourra servir à déterminer la constante. *Cette constante sera donc égale à la somme des triangles formés par deux côtés consécutifs du polygone et la droite fixe, divisés respectivement par le cube de la* *distance à la droite fixe du sommet du polygone déterminé par ces deux côtés.*

Dans ces théorèmes, le mot *somme* doit être pris dans le sens de somme algébrique.

Relativement aux courbes planes, on voit que :

1°. *Si l'on considère une courbe comme un polygone d'une infinité de côtés infiniment petits, l'intégrale qui donnera la somme de tous les triangles qui auraient pour bases ces côtés et pour sommets communs un point arbitraire de son plan, divisés respectivement par le produit des distances de leurs sommets à une droite fixe, sera constante.*

2°. *Si l'on projette chaque élément d'une courbe sur une droite fixe* I *par des parallèles de direction arbitraire, l'intégrale qui donnera la somme de ces projections divisées respectivement par le carré de la distance de l'élément correspondant à la droite* I, *sera constante, quelle que soit la direction des parallèles.*

3°. *Si l'on trace une droite* P *dans le plan d'une courbe, l'intégrale qui donnera la somme des triangles ayant pour côtés cette droite* P *et deux éléments consécutifs de la courbe, divisés respectivement par le produit des distances de ses sommets à une droite fixe, sera constante, quelle que soit la droite* P.

On doit remarquer que les courbes dont nous parlons ne sont pas nécessairement soumises à une définition mathématique : nos théorèmes ont lieu pour des courbes tracées au hasard.

Deux cercles étant concentriques, si d'un point de l'un on mène des tangentes à l'autre et que l'on trace la corde de contact, on forme un triangle dont l'aire est constante.

La transformation homographique donne ce théorème :

Lorsque deux coniques ont un double contact suivant *une droite I, et que d'un point de l'une on mène des tangentes à l'autre, elles déterminent avec la corde de contact de ces tangentes un triangle tel, que le rapport de son aire au produit des perpendiculaires abaissées de ses sommets sur la droite I, est constant.*

Si la droite I est à l'infini, les deux coniques sont homothétiques et l'aire du triangle est constante.

Dans l'hyperbole, l'aire du triangle déterminé par les asymptotes et une tangente est constant. Donc :

Étant données une conique et deux tangentes fixes, une tangente variable détermine avec celles-ci un triangle tel, que le rapport de son aire au produit des distances de ses sommets à la corde de contact des tangentes fixes est constant.

Deux rayons rectangulaires et la droite qui joint deux de leurs points d'intersections avec le cercle déterminent un triangle dont l'aire est constante. Donc :

Étant donnés une conique et un point O, *si l'on mène par ce point deux droites conjuguées et que l'on joigne deux de leurs points d'intersections avec la conique, le rapport de l'aire du triangle ainsi formé au produit des distances de ses sommets à la polaire du point* O *sera une quantité constante.*

Rappelons que deux droites *conjuguées* relatives à un point O sont deux droites telles, que le pôle de l'une se trouve sur l'autre.

Si dans le théorème précédent la polaire du point O est à l'infini, ce point est le centre de la conique; les droites qui y passent deviennent des diamètres conjugués, et l'aire du triangle construit sur ces diamètres est constant (théorème d'Apollonius).

Lorsque deux triangles $a'\,b'\,c'$, $a'_1\,b'_1\,c'_1$ ont leurs côtés homologues parallèles, l'aire d'un triangle def à la fois inscrit dans l'un et circonscrit dans l'autre est moyenne proportionnelle entre les aires des triangles semblables.

De là : *Lorsque les côtés de deux triangles* abc, $a_1 b_1 c_1$ *se coupent deux à deux sur une droite* I (*triangles homologiques*), *si l'on inscrit dans l'un un triangle* def, *circonscrit à l'autre, on a la relation*

$$\frac{\overline{def}^2}{\delta^2 . \varepsilon^2 . \varphi^2} = \frac{abc . a_1 b_1 c_1}{\alpha . \beta . \gamma . \alpha_1 . \beta_1 . \gamma_1},$$

où les lettres grecques représentent les distances des points correspondants à la droite I.

Si un triangle $a' b' c'$ dont les sommets sont situés respectivement sur trois droites parallèles A', B', C' se meut parallèlement à lui-même, il conserve une aire constante.

Donc :

Étant donné un faisceau de quatre droites A, B, C, I *et trois points fixes sur cette dernière droite, si l'on inscrit dans les trois premières un triangle* abc *dont les côtés passent respectivement par les points fixes, l'aire de ce triangle divisée par le produit des distances de ses sommets à la droite* I *donne un quotient constant.*

La suite prochainement.