

F. BRIOSCHI

Sur quelques propriétés des surfaces du troisième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 138-142

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__138_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS
DES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE;**

D'APRÈS M. F. BRIOSCHI.

1. Sur une surface du troisième degré (*) existent, en général, 27 droites (**). M. Cayley a démontré que ces

(*) Extrait des *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, de Barnaba Tortolini, t. VI, 1855.

(**) La découverte de ces 27 lignes appartient à M. Hart (*Dublin Journal*).

27 droites forment 45 groupes chacun de trois droites dans un même plan ; autrement une surface du troisième degré a 45 plans tangents qui touchent la surface, chacun suivant trois droites. Il est évident que chacune des droites est dans cinq des 45 plans ; de sorte que les 45 plans peuvent se partager en 9 faisceaux de 5 plans chacun (p. 136).

M. Hart a donné une notation très-commode pour indiquer les 27 droites et les 45 plans.

Les droites sont représentées par les 27 lettres

$$A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3;$$

$$a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3;$$

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \gamma_2, \beta_2, \alpha_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3;$$

18 plans sont représentés en unissant dans chaque ligne horizontale trois mêmes lettres avec des indices différents ou trois lettres différentes avec les mêmes indices ; ainsi la ligne des A donne les six plans

$$A_1 A_2 A_3, B_1 B_2 B_3, C_1 C_2 C_3, A_1 B_1 C_1, A_2 B_2 C_2, A_3 B_3 C_3.$$

De même la ligne des a et des α .

Les 27 autres plans sont.

$$A_1 a_1 \alpha_1, B_1 b_1 \beta_1, C_1 c_1 \gamma_1,$$

$$b_2 \beta_2, c_2 \gamma_2, a_2 \alpha_2,$$

$$c_3 \gamma_3, a_3 \alpha_3, b_3 \beta_3,$$

$$A_2 c_2 \beta_3, B_2 a_2 \gamma_3, C_2 b_2 \alpha_3,$$

$$a_3 \gamma_1, b_3 \alpha_1, a_3 \beta_1,$$

$$b_1 \alpha_2, c_1 \beta_2, c_1 \gamma_2,$$

$$A_3 b_3 \gamma_2, B_3 c_3 \alpha_2, C_3 a_3 \beta_2,$$

$$a_1 \alpha_3, a_1 \beta_3, b_1 \gamma_3,$$

$$c_2 \beta_1, b_2 \gamma_1, c_2 \alpha_1.$$

La droite A_1 est rencontrée par les dix lignes

$$(M) \quad A_2 A_3 B_1 C_1 a_1 b_1 c_1 \alpha_1 \beta_1 \gamma_1;$$

la droite A_1 n'est pas rencontrée par les seize lignes

$$(N) \quad B_2 B_3 C_1 C_3 a_2 a_3 b_1 b_3 c_1 c_2 a_2 \alpha_3 \beta_1 \beta_3 \gamma_1 \gamma_2.$$

Chaque ligne de la série (N) est rencontrée par 5 de la série M et par 5 de la série N.

Ainsi B_2 est rencontrée par

$$A_2 B_1 \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \text{ de la série (M),}$$

et par

$$B_3 C_2 a_2 b_3 c_1 \text{ de la série (N).}$$

Les 16 droites de la série (N) combinées deux à deux donnent 120 couples de droites; le cinquième de ces couples sont des droites qui se rencontrent; il y a donc 40 couples où les droites se rencontrent, et 80 couples où il n'y a pas de rencontre; chacun de ces 80 couples n'est pas rencontré non plus par la droite A_1 . Il y a donc 80 ternes de droites où il n'y a pas de rencontre.

2. Ce qu'on dit de A_1 s'applique à toute autre droite; il y a donc $\frac{10 \cdot 27}{2} = 135$ couples de droites qui se coupent; $\frac{16 \cdot 27}{2} = 216$ couples de droites qui ne se coupent pas, et, par conséquent, $\frac{216 \cdot 10}{2} = 720$ ternes de droites qui ne se coupent pas.

Nous appelons *terne* trois droites qui ne se coupent pas.

3. *Ternes conjugués*. Soit le terne $\alpha_1 \beta_3 \gamma_2$ formé de droites qui ne se coupent pas, et de même le terne $a_1 b_3 c_2$; mais chacune de ces dernières droites coupe les trois premières droites: ces deux ternes sont des conjugués et sont, par conséquent, sur une hyperboloïde à une nappe.

Hexagones conjugués. Deux ternes conjugués don-

nent naissance à trois hexagones où les côtés opposés se rencontrent; par exemple les deux ternes précédents donnent les trois hexagones conjugués

$$\begin{aligned} a_1 \alpha_1 b_3 \beta_3 c_2 \gamma_2, \\ a_1 \beta_3 b_3 \gamma_2 c_2 \alpha_1, \\ a_1 \gamma_2 b_3 \alpha_1 c_2 \beta_3. \end{aligned}$$

4. *Groupes opposés.* Considérant un terne on trouve 6 autres droites dont aucune ne rencontre le terne, et ces 6 droites se partagent en deux ternes.

Exemple. Soit le terne $\alpha_1 \beta_3 \gamma_2$; aucune de ces droites n'est coupée par les 6 droites $b_1 c_1 a_2 b_2 a_3 c_3$; ces six droites se partagent en deux ternes $a_2 b_1 c_3$, $a_3 b_2 c_1$; ces deux ternes sont dits opposés au terne $\alpha_1 \beta_3 \gamma_2$.

Les groupes opposés à deux ternes conjugués sont eux-mêmes des ternes conjugués.

Exemple. $\alpha_1 \beta_3 \gamma_2$, $a_1 b_3 c_2$ sont des ternes conjugués; les groupes opposés au premier terne sont

$$\begin{aligned} a_2 b_1 c_3, \\ a_3 b_2 c_1, \end{aligned}$$

les groupes opposés au second sont

$$\begin{aligned} \alpha_2 \beta_1 \gamma_3, \\ \alpha_3 \beta_2 \gamma_1, \end{aligned}$$

qui constituent des ternes conjugués.

Dans cet exemple les trois hexagones opposés sont

$$\begin{aligned} a_1 \alpha_1 b_3 \beta_3 c_2 \gamma_2, \\ a_2 \alpha_2 b_1 \beta_1 c_3 \gamma_3, \\ a_3 \alpha_3 b_2 \beta_2 c_1 \gamma_1. \end{aligned}$$

Le célèbre géomètre donne encore d'autres considérations du même genre. M. Schläfli, profond analyste de l'Université de Berne, a traité la même question (*Quar-*

terly Journal ; mai 1857, p. 65 et 110) et divise la surface en espèces d'après le nombre de *droites réelles et imaginaires*.

Nous ne comprenons pas encore suffisamment cet important travail pour en faire une exposition ; nous en rendrons compte si nous parvenons à le bien comprendre.