

J. DE VIRIEU

Solution de la question 457

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 125-129

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__125_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 457

(voir tome XVII, page 434),

PAR M. J. DE VIRIEU.

La formule proposée est un cas particulier de la seconde des formules suivantes :

$$\frac{+3\delta-4R}{12} \cdot \pi = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{6\delta-13R}{9} + R \left(\frac{1}{3} \right) + (R+\delta) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \right) \\ + (R+2\delta) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \right) + \dots \\ + (R+n\delta) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \dots \frac{2n-2}{2n+1} \frac{2n-2}{2n+3} \frac{2n}{2n-3} \right) \\ + \dots \text{à l'infini,} \end{array} \right\}$$

et

$$(\frac{1}{2}R + \delta) \cdot \frac{1}{\pi} = \left\{ \begin{array}{l} R + (R + \delta) \left(\frac{1}{2} \right)^2 + (R + 2\delta) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right)^2 \\ + (R + 3\delta) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \right)^2 + \dots \\ + [R + (n+1)\delta] \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \dots \frac{2n-1}{2n+2} \right)^2 \\ + \dots \text{à l'infini,} \end{array} \right\}$$

où R et δ représentent des constantes quelconques, n une variable positive croissant indéfiniment à partir de zéro, et dont les accroissements successifs sont égaux à 1.

Ces formules se déduisent de l'expression due à Wallis,

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \text{à l'infini.}$$

En effet, posons

$$u_n = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \right) \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \dots \left(\frac{2n+2}{2n+1} \cdot \frac{2n+2}{2n+3} \right),$$

$$v_n = \frac{2}{1} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \right) \dots \left(\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n+2}{2n+1} \right),$$

$$t_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \right) \dots \left(\frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \right),$$

$$z_n = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \right) \dots \left(\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{2n+3}{2n+2} \right).$$

En vertu de l'expression de Wallis, on a

$$u_n < \frac{\pi}{2} < v_n, \quad t_n < \frac{2}{\pi} < z_n;$$

et pour

$$n = +\infty, \quad \lim u_n = \frac{\pi}{2} = \lim v_n, \quad \lim t_n = \frac{2}{\pi} = \lim z_n,$$

on a

$$\begin{aligned}\Delta u_n &= + \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} u_n = \frac{1}{2n+5} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n+2}{2n+3} \right)^2, \\ \Delta v_n &= - \frac{1}{(2n+3)^2} \cdot v_n = - \frac{1}{2n+2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n+2}{2n+3} \right)^2, \\ \Delta t_n &= + \frac{1}{(2n+2)(2n+4)} \cdot t_n = + (2n+4) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdots \frac{2n+1}{2n+4} \right)^2, \\ \Delta z_n &= - \frac{1}{(2n+4)^2} z_n = - (2n+3) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdots \frac{2n+1}{2n+4} \right)^2.\end{aligned}$$

Mais on a

$$y_n = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \dots + \Delta y_{n-1}.$$

Remplaçant y successivement par u , v , t , z , on a

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{4}{3} + \frac{1}{5} \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \frac{1}{7} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \right)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2n+1} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1} \right)^2, \\ v_n &= 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \right)^2 + \dots \\ &\quad - \frac{1}{2n} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1} \right)^2, \\ t_n &= \frac{1}{2} + 4 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right)^2 + 6 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \right)^2 + \dots \\ &\quad + (2n+2) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n+2} \right)^2, \\ z_n &= \frac{3}{4} - 3 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right)^2 - 5 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \right)^2 - \dots \\ &\quad - (2n+1) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n+2} \right)^2.\end{aligned}$$

a, b, f, g étant des constantes, l'on a

$$\begin{aligned}
 au_n + bv_n &= \left\{ \begin{aligned} &+ \left(\frac{4}{3}a + 3b \right) - 3b \left(\frac{1}{3} \right) \\ &+ (2a - 5b) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \right) \\ &+ (4a - 7b) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \right) + \dots \\ &+ [2na - (2n+3)b] \\ &\times \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \dots \frac{2n-2}{2n+1} \frac{2n-2}{2n+1} \frac{2n}{2n+3} \right) \end{aligned} \right\}, \\
 ft_n + gz_n &= \left\{ \begin{aligned} &+ g + (2f - g) \left(\frac{1}{2} \right)^2 \\ &+ (4f - 3g) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right)^2 \\ &+ (6f - 5g) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \right)^2 + \dots \\ &+ [(2n+2)f - (2n+1)g] \\ &\times \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \dots \frac{2n-1}{2n+2} \right)^2 \end{aligned} \right\}.
 \end{aligned}$$

Posons dans la première équation $a = \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{3}R$,
 $b = -\frac{1}{3}R$, et dans la deuxième, $g = R$, $f = R + \frac{1}{2}\delta$, on
obtient

$$\frac{(3\delta - 2R)u_n - 2Rv_n}{6} = \left\{ \begin{aligned} &+ \frac{6\delta - 13R}{9} + R \left(\frac{1}{3} \right) \\ &+ (R + \delta) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \right) \\ &+ (R + 2\delta) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \right) + \dots \\ &+ (R + n\delta) \\ &\times \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \dots \frac{2n-2}{2n+1} \frac{2n-2}{2n+1} \frac{2n}{2n+3} \right) \end{aligned} \right\},$$

et

$$\frac{(3R + \delta) t_n + 2R z_n}{2} = \left\{ \begin{array}{l} + R + (R + \delta) \left(\frac{1}{2} \right)^2 \\ + (R + 2\delta) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right)^2 \\ + (R + 3\delta) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \right)^2 + \dots \\ + [R + (n+1)\delta] \\ \times \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \dots \frac{2n-1}{2n+2} \right)^2 \end{array} \right\}.$$

En passant aux limites (p. 126), on a les formules annoncées au commencement de cet article. Faisant

$$\delta = 0, \quad R = 1,$$

on a la solution de la question 457.

Note. M. Hatterer (J.), maître répétiteur au lycée de Clermont-Ferrand, donne une solution déduite aussi de l'expression Wallis.
