

L. DEWULF

Seconde solution de la question 195

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17
(1858), p. 79-81

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__79_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 195

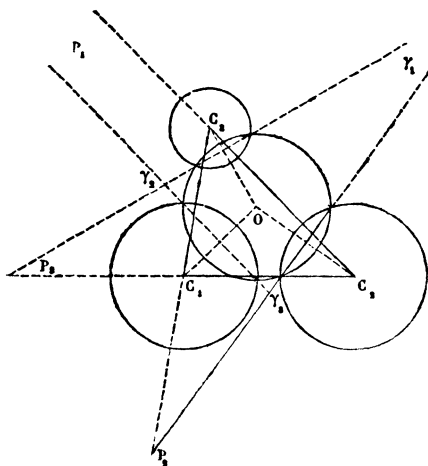
(voir t. XI, p. 198);

PAR M. L. DEWULF.

On donne trois cercles C_1, C_2, C_3 ; on trace trois nouveaux cercles, P_1 ayant même sécante commune que C_1 et C_3 , et coupant C_1 orthogonalement; de même P_2 et P_3 . Démontrer que ces trois nouveaux cercles ont même corde (réelle ou idéale) commune ou même axe radical.

Traçons le cercle orthotomique O aux trois cercles donnés, ce cercle est aussi orthotomique aux trois nouveaux cercles. Leurs axes radicaux passent donc par son centre.

Le centre de P_1 se trouve à l'intersection de la droite C_1, C_3 , avec la corde γ_2, γ_3 commune à C_1 et à O .



On trouve de même les centres de P_2 et de P_3 . Il faut démontrer que ces trois points sont en ligne droite.

Projetons la figure de manière que la droite P_1P_2 passe à l'infini.

$\gamma_1\gamma_2$ deviendra parallèle à C_1C_2 et C_1O sera perpendiculaire à C_2C_3 .

$\gamma_1\gamma_3$ deviendra parallèle à C_1C_3 et C_1O sera perpendiculaire à C_1C_2 .

O deviendra l'intersection de deux hauteurs du nouveau triangle; donc la projection de C_2O sera aussi perpendiculaire à C_1C_2 et P_3 passera aussi à l'infini. Donc, etc.

Remarques.

1°. $C_1, C_2, C_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ forment deux triangles polaires réciproques. Les droites qui joignent les sommets opposés se coupent en un même point, pôle de la ligne P_1P_2 par rapport au cercle orthotomique O .

2°. Les points $C_1, C_2, C_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont sur une même conique, ce qui donne ce théorème : Les sommets de deux triangles polaires réciproques sont sur une même conique.

3°. Les côtés des deux triangles forment un hexagone circonscriptible à une conique.

On peut arriver à une solution aussi simple par l'analyse. Les trois axes radicaux de $P_1P_2P_3$ passent en O .

Soit $\varphi = 0$ l'équation homogène du cercle orthotomique O ; soient $x_0y_0z_0, x_1y_1z_1, x_2y_2z_2$ les coordonnées des trois sommets du triangle $C_1C_2C_3$, et posons

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \Delta.$$

Les équations des lignes $C_1C_2, C_1C_3, C_2C_3, \gamma_1\gamma_2,$

$\gamma_1\gamma_3, \gamma_2\gamma_3$ seront

$$\frac{d\varphi}{dx_0}x + \frac{d\varphi}{dy_0}y + \frac{d\varphi}{dz_0}z = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx_1}x + \frac{d\varphi}{dy_1}y + \frac{d\varphi}{dz_1}z = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx_2}x + \frac{d\varphi}{dy_2}y + \frac{d\varphi}{dz_2}z = 0,$$

et

$$\frac{d\Delta}{dx_0}x + \frac{d\Delta}{dy_0}y + \frac{d\Delta}{dz_0}z = 0,$$

$$\frac{d\Delta}{dx_1}x + \frac{d\Delta}{dy_1}y + \frac{d\Delta}{dz_1}z = 0,$$

$$\frac{d\Delta}{dx_2}x + \frac{d\Delta}{dy_2}y + \frac{d\Delta}{dz_2}z = 0.$$

Appelons $x' y' z'$, $x'' y'' z''$, $x''' y''' z'''$ les coordonnées des points P_1, P_2, P_3 , et faisons

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

La condition pour que les trois points P_1, P_2, P_3 soient en ligne droite

$$\frac{dD}{dx'''} \cdot \frac{dD}{dy'} - \frac{dD}{dx'} \cdot \frac{dD}{dy'''} = D \frac{d^2D}{dx''' dy'} = 0$$

ou

$$D = 0,$$

équation qui se vérifie, mais par des calculs un peu longs.