

J. STEINER

Théorèmes divers et problèmes sur les courbes planes

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17
(1858), p. 443-446

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__443_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**THEOREMES DIVERS ET PROBLÈMES SUR LES COURBES
PLANES ;**

DE M. J. STEINER (*).

1. Notation. Soient une courbe plane C^n de degré n et F un point fixe dans le plan de la courbe ; si un faisceau de droites passe par le point fixe F , chaque rayon du fais-

(*) *Bulletin mensuel de l'Académie de Berlin*, juillet 1858, p. 419-443

ceau coupe la courbe en n points. Pour un rayon quelconque, soit p le produit des distances des n points d'intersection au point F .

THÉOREME I. *Les rayons se partagent en général en groupes de $2n$ droites où dans chaque groupe les produits p sont égaux. Entre ces $2n$ droites, il y en a n où le produit p présente un minimum relatif. Ce minimum devient autant de fois un maximum que la courbe a de couples d'asymptotes imaginaires.*

2. **THÉOREME II.** *Si on prend sur chaque rayon un point q tel, que sa distance au point fixe F étant élevée à la puissance n soit égale au produit p , le lieu de ce point est une courbe Q^{2n} de degré $2n$, qui a n doubles asymptotes qui passent par le point F ; ce faisceau d'asymptotes rencontre la courbe C^n en $2n(n-1)$ points; dans chacun de ces rayons asymptotes, le point q coïncide avec un des $2n(n-1)$ points d'intersection. Ainsi il passe par le point F , $2n(n-1)$ rayons tels, que pour chacun un certain segment est moyenne géométrique entre les $n-1$ autres segments. Le point q devant être porté de part et d'autre du point F , il s'ensuit que F est le centre de la courbe Q^{2n} et un point singulier multiple.*

3. **THÉOREME III.** *Dans les n droites où le produit p est un minimum relatif, la distance du point q au point F est aussi un minimum, de sorte que ces droites sont, au point q , normales à la courbe Q^{2n} .*

4. Applications aux coniques. En faisant $n=2$, les $2n$ droites du théorème I se réduisent dans l'ellipse à deux réelles, qui sont parallèles à deux diamètres égaux; les deux autres sont imaginaires; comme il y a un couple d'asymptotes imaginaires, il y a une droite qui est un maximum; c'est la parallèle à l'axe focal. Dans l'hyper-

bole, il y a quatre transversales parallèles aux quatre diamètres égaux; deux de ces diamètres appartiennent à l'hyperbole conjuguée.

5. THÉORÈME. IV. *Par un point fixe F, situé dans le plan d'une conique, on mène trois transversales quelconques; sur les trois cordes comme diamètres, on décrit des cercles. Le point radical de ces cercles est fixe.*

Si le point F est à l'infini, le théorème devient évident.

6. THÉORÈME V. *Une droite de longueur constante, qui se meut entre deux courbes planes d'ordre p et q, enveloppe une courbe de classe $4pq$ et a à l'infini une tangente de contact $2pq$.*

7. THÉORÈME VI. *Une droite de longueur constante, qui se meut dans une courbe de degré C^n , de degré n, enveloppe une courbe de la classe $2n(n-1)$; il y a $n(n-1)$ cordes de direction donnée; l'enveloppe touche les n asymptotes de la courbe C^n à l'infini dans un contact de quatre points; les milieux des cordes parallèles sont sur une ligne de degré $n-1$ (*).*

8. Soit la courbe C^4 ; et l'enveloppe de la corde constante est de vingt-quatrième classe; cette enveloppe et la courbe C^4 ont $12 \cdot 24 = 288$ tangentes en commun, parmi lesquelles sont les quatre asymptotes, qui comptent chacune pour quatre tangentes; de sorte qu'il reste $288 - 16 = 272$ tangentes communes. Soient S une de ces 272 tangentes, α le point de contact avec la courbe C^4 , et β, γ les points d'intersection de cette tangente avec la courbe C^4 . Si β et γ sont du même côté de α , alors $\beta\gamma$ est égale à la corde constante; si α est entre β et γ , c'est $\alpha\beta$ ou $\alpha\gamma$, qui

(*) Il serait commode d'adopter les expressions contact *biponctuel*, *triponctuel*, *quadriponctuel*, etc.; de même pour le point multiple. TM.

est égale à la courbe constante; dans ce dernier cas, les deux courbes se touchent en α , et S compte pour deux tangentes communes.

9. Soit la courbe C^3 ; l'enveloppe est de la douzième classe et a avec la courbe C^3 , en commun $6 \cdot 12 = 72$ tangentes, parmi lesquelles les trois asymptotes de la courbe C^3 comptent pour $3 \cdot 4 = 12$ tangentes, de sorte qu'il reste $72 - 12 = 60$ tangentes non asymptotes. Soient S une de ces 60 tangentes, α le point de contact, et β le point d'intersection. Les deux courbes se touchent en α , et $\alpha\beta$ est égale à la corde de longueur constante; de sorte que chaque tangente compte pour deux; il n'y a donc que 30 tangentes communes distinctes et l'on obtient les théorèmes suivants :

10. THÉOREME VII. *Dans toute courbe de troisième degré, il y a 30 tangentes pour chacune desquelles la distance du point de contact au point d'intersection est de même longueur.*

Lorsque cette distance est nulle, on a les 30 points d'inflexion dont trois seulement sont visibles.

11. THÉOREME VIII. *Dans une courbe C^3 , on ne peut mener que 60 transversales coupant la courbe en trois points α, β, γ , tellement que $\alpha\beta, \alpha\gamma$ soient de longueurs données.*

12. THÉOREME IX. *Courbe C^2 ; l'enveloppe de la corde constante est de la quatrième classe; par un point fixe on ne peut mener que quatre cordes égales; les quatre milieux de ces cordes sont sur un même cercle, dont le centre est indépendant de la longueur de la corde, et si C^2 représente deux droites, l'enveloppe est une courbe parallèle à une hypocycloïde.*

La suite prochainement.
