

Théorème général sur les courbes planes et sur les surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17
(1858), p. 441-443

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__441_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME GÉNÉRAL SUR LES COURBES PLANES ET SUR LES SURFACES.

1. *Notations.* Sur une droite A' , prenons n points, et d'un point O pris hors de cette droite, menons n rayons à ces points. Ces rayons pris deux à deux donnent $\frac{n(n-1)}{2}$ angles; designons le produit des $\frac{n(n-1)}{2}$ sinus de ces angles par A'_p .

2. **THÉORÈME.** Soit donné dans un même plan ce système de n droites $A', A'', \dots, A^{(n)}$ traversé par un second système de n droites $B', B'', \dots, B^{(n)}$; chacune de ces $2n$ droites contient n points d'intersection; menons d'un point O des rayons aux n^2 points d'intersection;

les n points d'intersection situés sur la droite A' donnent A'_p ; sur la droite A'' , le produit A''_p ; posons

$$A'_p, A''_p, A'''_p, \dots, A^{(n)}_p = \alpha;$$

de sorte que α est le produit de $\frac{n^2 (n-1)}{2}$ sinus; désignons par β le produit analogue pour β ; si $\frac{\alpha}{\beta}$ est un quotient constant, le lieu du point O est une ligne d'ordre n et passant par les n^2 points d'intersection.

Démonstration. Soient r_1, r_2 , deux rayons interceptant le segment s , et h la hauteur du triangle ayant pour côtés r_1, r_2, s ; on a

$$\sin r_1, r_2 = \frac{hs}{r_1, r_2};$$

remplaçant chaque sinus par une telle valeur, on retombe sur le théorème des *distances* (p. 368).

Observation. Faisant

$$n = 2,$$

on a la propriété vulgaire des coniques relative au rapport *projectif* de M. Poncelet; *bi-multiple* de M. Steiner; *anharmonique* de M. Chasles.

3. Soit un système de n plans $A', A'', \dots, A^{(n)}$ et un second système de n plans $B', B'', \dots, B^{(n)}$; ils se coupent suivant n^2 droites par lesquelles passent une infinité de surfaces d'ordre n (page 368); ôtons les plans A', B' , il reste deux systèmes, chacun de $n-1$ droites, et par les $(n-1)^2$ droites d'intersection passent une infinité de surfaces d'ordre $n-1$. Une surface d'ordre n coupe une surface de l'ordre $n-1$ suivant une ligne d'ordre $n(n-1)$: or ces surfaces ont en commun $(n-1)^2$ droites; donc elles ont encore en commun une ligne

d'ordre $n - 1$. Or, je dis que cette ligne est plane et que son plan passe par l'intersection des plans A' , B' . En effet, soit O un point de cette ligne; le produit des n distances de ce point aux n plans A' , A'' , $\dots$, $A^{(n)}$ divisé par le produit des distances du même point aux n plans B' , $\dots$, $B^{(n)}$ est un quotient constant quel que soit le point O pris sur la courbe; de même, le produit des $n - 1$ distances du point O aux $n - 1$ plans A'' , $\dots$, $A^{(n)}$ divisé par le produit des distances aux $n - 1$ plans B'' , B''' , $\dots$, $B^{(n)}$; donc la distance du point O au plan A' , divisée par la distance au plan B' , donne un quotient constant: ainsi le lieu du point O est dans un plan passant par l'intersection de A' et B' .
c. Q. F. D.

4. Si A et B représentent des droites situées dans le même plan, on obtient une propriété analogue pour les courbes planes.

5. Si les A et les B représentent des surfaces, les droites d'intersection sont remplacées par des courbes d'intersections, qui présentent encore des propriétés analogues à celles qui sont énoncées ci-dessus pour les droites.