

A. TERQUEM

Solution de la question 451

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17
(1858), p. 432-433

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__432_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 454

(voir page 360);

PAR M. A. TERQUEM,

Élève au lycée Saint-Louis.

Une hyperbole équilatère homofocale à une ellipse intercepte sur les côtés d'un angle droit circonscrit à l'ellipse deux cordes égales.

Démonstration. Soit l'équation de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

celle de l'hyperbole équilatère homofocale est

$$x^2 - y^2 = \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

Les équations des tangentes perpendiculaires seront de la forme

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2},$$

et

$$y = -\frac{x}{m} \pm \sqrt{\frac{a^2}{m^2} + b^2}.$$

Je cherche l'intersection de la première tangente avec l'hyperbole; les abscisses sont données par l'équation du second degré suivante :

$$(1 - m^2) x^2 \pm 2m \sqrt{a^2 m^2 + b^2} x - \frac{a^2 (2m^2 + 1) + b^2}{2} = 0.$$

La différence des racines se trouve immédiatement

$$x' - x'' = 2 \sqrt{\frac{2m^2(a^2 m^2 + b^2) + (1 + m^2)[a^2(2m^2 + 1) + b^2]}{2(1 - m^2)^2}};$$

ou, en réduisant et élevant au carré,

$$(x' - x'')^2 = \frac{2(1 + m^2)(a^2 + b^2)}{(1 - m^2)^2}.$$

La différence du carré des ordonnées s'obtient aussi immédiatement en substituant les valeurs de x' et de x'' dans l'équation de la tangente

$$y' - y'' = m(x' - x'').$$

En désignant par l la longueur de la corde, on aura

$$l^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 = \frac{2(1 + m^2)^2(a^2 + b^2)}{(1 - m^2)}.$$

Cette valeur de l^2 ne variera pas si on remplace m par $-\frac{1}{m}$; donc les deux cordes sont égales. c. q. f. d.

Note. La longueur de la corde varie avec la fraction $\frac{1 + m^2}{1 - m^2}$; en remplaçant m par $\tan \alpha$, on trouve

$$\frac{1 + \tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha} = \sec 2\alpha.$$

Le maximum est pour $2\alpha = 90^\circ$ ou $\alpha = 45^\circ$; la tangente est parallèle à l'asymptote; le minimum pour $2\alpha = 180^\circ$, la tangente est perpendiculaire à l'axe de l'hyperbole.