

S. ARONHOLD

Remarque sur la résolution des équations biquadratiques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17 (1858), p. 391-392

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__391_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REMARQUE
SUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS BIQUADRATIQUES ;

PAR M. LE D^r S. ARONHOLD, DE BERLIN.

Si l'on représente l'équation donnée par

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

et que l'on calcule les déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & b, & c + 2\lambda \\ b, & c - \lambda, & d \\ c + 2\lambda, & d, & e \end{vmatrix}, \quad \frac{d\Delta}{de} = \begin{vmatrix} a, & b \\ b, & c - \lambda \end{vmatrix},$$

alors $\Delta = 0$ est une équation cubique de la forme

$$\Delta = -4\lambda^3 + (ae - 4bd + 3c^2)\lambda + ad^2 + eb^2 + c^3 - ace - 2bcd = 0,$$

qui, manquant du second terme, pourra être résolue directement par la règle de Cardan. Soient

$$\left(\frac{d\Delta}{de}\right)_1, \quad \left(\frac{d\Delta}{de}\right)_2, \quad \left(\frac{d\Delta}{de}\right)_3$$

les valeurs du second déterminant pour les trois racines de l'équation $\Delta = 0$, on aura

$$(1) \quad x = \frac{1}{a} \left[-b \pm \sqrt{\left(\frac{d\Delta}{de}\right)_1} \pm \sqrt{\left(\frac{d\Delta}{de}\right)_2} \pm \sqrt{\left(\frac{d\Delta}{de}\right)_3} \right],$$

où les signes correspondants doivent être tels, que le produit soit positif.

On a encore plus généralement, pour des valeurs quel-

conques de ξ et de η ,

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{(ax+b)\xi^3 + 3(bx+c)\xi^2\eta + 3(cx+d)\xi\eta^2 + (dx+e)\eta^3}{\xi - \eta x} \\ \pm \sqrt{\left(\frac{d\Delta}{de}\right)_1 \xi^4 - \left(\frac{d\Delta}{dd}\right)_1 \xi^3\eta + \left(\frac{d\Delta}{dc}\right)_1 \xi^2\eta^2 - \left(\frac{d\Delta}{db}\right)_1 \xi\eta^3 + \left(\frac{d\Delta}{da}\right)_1 \eta^4} \\ \pm \sqrt{\left(\frac{d\Delta}{de}\right)_2 \xi^4 - \left(\frac{d\Delta}{dd}\right)_2 \xi^3\eta + \left(\frac{d\Delta}{dc}\right)_2 \xi^2\eta^2 - \left(\frac{d\Delta}{db}\right)_2 \xi\eta^3 + \left(\frac{d\Delta}{da}\right)_2 \eta^4} \\ \pm \sqrt{\left(\frac{d\Delta}{de}\right)_3 \xi^4 - \left(\frac{d\Delta}{dd}\right)_3 \xi^3\eta + \left(\frac{d\Delta}{dc}\right)_3 \xi^2\eta^2 - \left(\frac{d\Delta}{db}\right)_3 \xi\eta^3 + \left(\frac{d\Delta}{da}\right)_3 \eta^4} \end{array} \right\},$$

d'où l'on tire la valeur précédente de x en faisant $\xi = 1$,
 $\eta = 0$; pour $\xi = 0$, $\eta = 1$, on obtiendrait $\frac{1}{x}$.

Les déterminants doivent toujours être calculés de manière que le terme provenant de la diagonale de gauche à droite soit pris négativement.

Note du Traducteur. Comme

$$\frac{d\Delta}{de} = a\lambda + b$$

et que

$$ax + b = y,$$

on a

$$x = \frac{1}{a}(-b + y),$$

la formule (1) est vérifiée par ce qui précède. La démonstration de la formule (2) exige quelques explications qui pourront être données dans un autre article.
