

Généralisation du théorème de Newton sur le quadrilatère inscrit dans une conique

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17 (1858), p. 368-370

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__368_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE NEWTON
SUR LE QUADRILATÈRE INSCRIT DANS UNE CONIQUE.**

1. THÉORÈME. *Soient deux systèmes chacun de n plans; ces deux systèmes se coupent en n^2 droites par lesquelles passent une infinité de surfaces de degré n ; chacune de ces surfaces jouit de cette propriété : le produit des distances d'un point quelconque de cette surface à l'un des systèmes de plans est au produit des distances du même point à l'autre système de plans dans un rapport constant.*

Démonstration. Soient

$$A_p = a$$

l'équation d'un plan quelconque du premier système, et

$$B_p = 0$$

l'équation d'un plan quelconque du second système; la surface représentée par l'équation

$$(1) \quad A_1 A_2 A_3 \dots A_n + \lambda B_1 B_2 \dots B_n = 0,$$

où λ étant une constante arbitraire, est une surface de degré n et passant par les n^2 droites d'intersection du système A avec le système B . Soit α_p la distance perpendiculaire d'un point de cette surface au plan A_p et β_p au plan B_p ; d'après l'expression connue de ces distances, on a

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n + \lambda \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n = 0.$$

Observation. L'équation (1) renferme $8n$ constantes,

λ comprise ; une surface de degré n renferme $\frac{n^3 + 6n^2 + 11n}{6}$

constantes. On peut donc identifier cette équation avec l'équation (1) tant que n est inférieur à 5, identification purement *analytique* pour $n = 2$ et $n = 4$ lorsque ces surfaces ne renferment pas de droites ; mais les surfaces du deuxième et du quatrième degré qui contiennent des droites peuvent se mettre respectivement sous la forme

$$A_1 A_2 + \lambda B_1 B_2 = 0, \quad A_1 A_2 A_3 A_4 + \lambda B_1 B_2 B_3 B_4 = 0,$$

et une surface *quelconque* du troisième degré peut se mettre sous la forme

$$A_1 A_2 A_3 + \lambda B_1 B_2 B_3 = 0 ;$$

ces surfaces possèdent donc la propriété *des distances*, ci-dessus énoncée, et l'on peut en déduire les principales propriétés.

2. THÉORÈME. Soient donnés dans un plan deux systèmes, chacun de n droites ; ces deux systèmes se coupent en n^2 points par lesquels passent une infinité de lignes de degré n ; chacune de ces lignes jouit de cette propriété : le produit des distances d'un point quelconque de cette ligne à l'un des systèmes de droites est au produit des distances du même point à l'autre système dans un rapport constant.

Même démonstration.

Observation. L'équation (1) où les A et les B représentent des droites contient $6n$ constantes. Une ligne de degré n renferme $\frac{n^3 + 3n}{2}$ constantes. Aussi on peut opérer *analytiquement* l'identification pour n inférieur à 10.

Faisant $n = 2$, on a la propriété des *distances* pour le

quadrilatère inscrit dans le quadrilatère; théorème fondamental de Newton dont la constance du *rapport anharmonique* de M. Chasles n'est qu'une simple transformation (t. XVI, p. 220); mais l'énoncé de Newton présente l'avantage de pouvoir être généralisé.

3. Par des transformations métriques du théorème de Newton, M. le capitaine Faure parvient à celui-ci :

Un quadrilatère étant circonscrit à une conique, le produit des distances des deux sommets opposés à une cinquième tangente quelconque, divisé par le produit des distances des deux autres sommets à la même tangente, donne un quotient constant.
