

Question d'examen (École navale)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17
(1858), p. 283-284

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__283_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION D'EXAMEN (ÉCOLE NAVALE).

Trouver la limite du produit $\cos a \cdot \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{4} \cdot \cos \frac{a}{8} \dots$

Euler a résolu la question ; il ne l'aurait pas proposée dans les examens d'admissibilité à l'École Navale.

On a

$$\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a,$$

$$\sin a = 2 \cdot \sin \left(\frac{a}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{a}{2} \right),$$

$$\sin \left(\frac{a}{2} \right) = 2 \cdot \sin \left(\frac{a}{4} \right) \cdot \cos \left(\frac{a}{4} \right),$$

.

$$\sin \left(\frac{a}{2^{n-1}} \right) = 2 \cdot \sin \left(\frac{a}{2^n} \right) \cdot \cos \left(\frac{a}{2^n} \right).$$

La multiplication de ces équations donne

$$\sin 2a = 2^{n+1} \sin \left(\frac{a}{2^n} \right) \times \cos a \cdot \cos \left(\frac{a}{2} \right) \cos \left(\frac{a}{2^2} \right) \dots \cos \left(\frac{a}{2^n} \right),$$

d'où

$$\cos a \cdot \cos \left(\frac{a}{2} \right) \cos \left(\frac{a}{2^2} \right) \dots \cos \left(\frac{a}{2^n} \right) = \frac{\sin 2a}{2^{n+1} \cdot \sin \left(\frac{a}{2^n} \right)},$$

.

mais

$$\frac{\sin 2a}{2^{n+1} \cdot \sin \left(\frac{a}{2^n} \right)} = \frac{\left(\frac{\sin 2a}{2a} \right)}{\frac{2^{n+1} \sin \left(\frac{a}{2^n} \right)}{2a}} = \frac{\left(\frac{\sin 2a}{2a} \right)}{\left(\frac{\sin \cdot \frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}} \right)}.$$

Quand n augmente indéfiniment, la fraction $\frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\left(\frac{a}{2^n} \right)}$

moindre que l'unité augmente aussi, et tend vers l'unité. A la limite ($n = \infty$) on a

$$\frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}} = 1.$$

Donc la limite du produit $\cos a \cdot \cos \left(\frac{a}{2} \right) \cos \left(\frac{a}{4} \right) \dots$, est $\frac{\sin 2a}{2a}$ ou $\cos a \times \frac{\sin a}{a}$.

Supposons

$$a = \frac{\pi}{4};$$

il en résultera

$$2a = \frac{\pi}{2}; \quad \sin 2a = 1;$$

et par suite

$$\lim \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{\pi}{16} \right) \dots = \frac{2}{\pi};$$

d'où

$$\pi = \frac{2}{\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{\pi}{16} \right) \dots}.$$

G.