Nouvelles annales de mathématiques

Gerono

Question d'examen (École polytechnique)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 236-238

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__236_1>

QUESTION D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE);

Des relations qui existent entre les coefficients des termes de l'équation générale :

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2\,byz + 2\,b'xz + 2\,b''xy + 2\,cx + 2\,c'y + 2\,c''z + d = 0,$$

quand cette équation représente un cylindre parabolique.

Tous les plans diamétraux du cylindre parabolique sont

(*) M. Liouville a donné le théorème général, 1857, p. 277. TM.

parallèles entre eux; le cylindre parabolique est la seule surface du second degré qui ait cette propriété : on obtiendra donc les relations cherchées en exprimant que l'équation générale des plans diamétraux

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} (am + b''n + b')x + (b''m + a'n + b)y \\ \quad + (b'm + bn + a'')z + cm + c'n + c'' = 0 \end{array} \right.$$

représente des plans parallèles, quelles que soient les valeurs attribuées aux coefficients angulaires m, n, des cordes conjuguées.

Pour que cette condition soit remplie il faut que les rapports des coefficients des variables x, y, z, dans l'équation (1), soient indépendants des quantités m et n. Ces rapports ont pour expressions

$$\frac{am + b''n + b'}{b''m + a'n + b}, \quad \frac{am + b''n + b'}{b'm + bn + a''};$$

il faut donc qu'on ait

$$\frac{a}{b''} = \frac{b'}{b}, \quad \frac{b''}{a'} = \frac{b'}{b}, \quad \frac{a}{b'} = \frac{b''}{b}, \quad \frac{b''}{b} = \frac{b'}{a''};$$

d'où

$$(2)\qquad a = \frac{b'b''}{b}, \quad a' = \frac{bb''}{b'}, \quad a'' = \frac{bb'}{b''}.$$

Telles sont les relations cherchées. On voit qu'elles sont au nombre de trois; on peut en conclure que le nombre des conditions nécessaires pour la détermination d'un cylindre parabolique est *six*.

Remarque. Les relations (2) donnent :

$$a\,a'\,a'' = b\,b'\,b'',$$

et

$$b\,b'\,b'' = ab^2 = a'\,b'^2 = a''\,b''^2,$$

et par suite

$$ab^2 + a'\,b'^2 + a''\,b''^2 - a\,a'\,a'' - 2\,b\,b'\,b'' = 0,$$

égalité qui doit, en effet, avoir lieu, puisque la surface n'a pas de centre.

Des relations (2) donnent anssi :

$$b''^2 = aa', \quad b'^2 = aa'', \quad b^2 = a'a'',$$

et ces dernières égalités montrent que les trois sections de la surface par les plans coordonnés sont du genre des paraboles, ce qui est encore une vérification.

G.