

RICHARD P. OXAMENDI

Solution de la question 377

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17
(1858), p. 19-25

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__19_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 377

(voir t. XVI, p. 407) ;

PAR M. RICHARD P. OXAMENDI.

Soient AA_1, BB_1, CC_1 , les trois perpendiculaires abais-

(*) $\frac{\log \infty}{\infty} = 0$,
d'où l'équation paradoxale

$$1^\infty = 0.$$

TM.

sés des sommets d'un triangle ABC respectivement sur les côtés opposés ; considérons le triangle $A_1 B_1 C_1$; soient A_2 le point où $B_1 C_1$ coupe AA_1 ; B_2 le point où $A_1 C_1$ coupe BB_1 ; C_2 le point où $A_1 B_1$ coupe CC_1 ; considérons le triangle $A_2 B_2 C_2$; soient A_3 l'intersection de $B_2 C_2$ avec AA_1 ; B_3 l'intersection de $A_2 C_2$ avec BB_1 , et C_3 l'intersection de $A_2 B_2$ avec CC_1 , et ainsi de suite.

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

étant les équations des côtés BC, AC, AB du triangle, l'équation de $A_n B_n$ sera

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - m_n \gamma \cos C = 0,$$

ou

$$m_n = \frac{m_{n-1} + 2}{m_{n-1}}, \quad m_{n-1} = \frac{m_{n-2} + 2}{m_{n-2}}, \quad \dots, \quad m_2 = \frac{m_1 + 2}{m_1},$$

d'où

$$m_1 = 1,$$

$$m_{2n} = \frac{2^{2n+1} + 1}{2^{2n} - 1} \quad m_{2n+1} = \frac{2^{2n+2} - 1}{2^{2n+1} + 1};$$

l'équation de $A_\infty B_\infty$ est donc

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - 2 \gamma \cos C = 0;$$

de même pour les côtés $B_n C_n$, $A_n C_n$.

1°. La droite AA_1 bissecte l'angle $B_n A_n C_n$; de même les droites BB_1 , CC_1 .

2°. Toutes les droites $A_n B_n$ passent par le même point ; de même les droites $A_n C_n$, $B_n C_n$, et ces trois points sont une même droite (*).

(E. HARRISON, Bach. Arts, Trinity college Cambridge.)

L'équation de AA_1 est

$$(1) \quad \beta \cos B - \gamma \cos C = 0,$$

(*) Voir la figure t XVI, p 408.

puisque le rapport des perpendiculaires abaissées d'un point de AA_1 sur AB et AC est égal à celui des sinus des angles BAA_1 et B_1AC ; or ces angles sont complémentaires de B et C . On peut remplacer le rapport de sinus par les rapports des cosinus des angles B et C .

On peut écrire de suite les équations des deux autres hauteurs,

$$(2) \quad BB_1, \quad \alpha \cos A - \gamma \cos C = 0,$$

$$(3) \quad CC_1, \quad \beta \cos B - \alpha \cos A = 0.$$

Leur somme est nulle, ce qui donne un théorème connu.

Formons à présent l'équation de A_1B_1 ; cette droite passe par les points A_1 intersection de (AA_1, BC) et B_1 intersection de (AC, BB_1) , son équation sera de la forme

$$(4) \quad r\alpha + s\beta + t\gamma = 0.$$

Soient $\alpha' \beta' \gamma'$, $\alpha'' \beta'' \gamma''$ les perpendiculaires abaissées des points A_1, B_1 sur les droites $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\beta = 0$, on aura les deux équations entre ces coordonnées,

$$r\alpha' + s\beta' + t\gamma' = 0,$$

$$r\alpha'' + s\beta'' + t\gamma'' = 0.$$

Si l'on cherche les valeurs des rapports $\frac{r}{t}$, $\frac{s}{t}$, et qu'on substitue ces valeurs dans l'équation (4), on arrive à cette équation

$$(5) \quad \alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + \beta(\alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma') + \gamma(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta') = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme d'un déterminant

$$(6) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \gamma' \\ \beta & \beta' & \gamma'' \\ \gamma & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0.$$

Cherchons maintenant les valeurs de α' , β' , γ' , α'' , β'' , γ'' , pour les substituer dans cette équation et obtenir l'équation de A_1 , B_1 . On a

$$\text{Pour le point } A_1 \quad \begin{cases} \beta' \cos B - \gamma' \cos C = 0, \\ \alpha' = 0. \end{cases}$$

$$\text{Pour le point } B_1 \quad \begin{cases} \gamma'' \cos C - \alpha'' \cos A = 0, \\ \beta'' = 0. \end{cases}$$

Si l'on substitue les rapports $\frac{\beta'}{\gamma'}$ et $\frac{\alpha''}{\gamma''}$ dans l'équation (5), on aura

$$\alpha (+ \beta' \gamma'') + \beta (+ \alpha'' \gamma') + \gamma (- \alpha'' \beta') = 0,$$

mais

$$\beta' = \gamma' \frac{\cos C}{\cos B}, \quad \alpha'' = \gamma'' \frac{\cos C}{\cos A},$$

on a, en substituant,

$$\alpha \left(\gamma' \gamma'' \frac{\cos C}{\cos B} \right) + \beta \left(\gamma' \gamma'' \frac{\cos C}{\cos A} \right) + \left(- \gamma' \gamma'' \frac{\cos C \cos C}{\cos B \cos A} \right) \gamma = 0:$$

divisant par $\gamma' \gamma'' \cos C$, nous aurons

$$\frac{\alpha}{\cos B} + \frac{\beta}{\cos A} - \frac{\cos C}{\cos B \cos A} \gamma = 0;$$

chassant les dénominateurs nous avons, pour l'équation de A_1 , B_1 ,

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - \gamma \cos C = 0.$$

Les formules étant symétriques, nous pouvons écrire sans calcul les équations des droites $B_1 C_1$ et $A_1 C_1$; ces équations sont :

$$\alpha \cos A + \gamma \cos C - \beta \cos B = 0, \quad (A_1 C_1)$$

$$\beta \cos B + \gamma \cos C - \alpha \cos A = 0. \quad (B_1 C_1)$$

Si nous voulons trouver l'équation A_2 , B_2 , nous sub-

stituerons la valeur de α , β , γ , qui correspond aux points A_2 et B_2 dans l'équation (5); or l'on a

$$\text{Pour le point } A_2 \begin{cases} \beta' \cos B - \gamma' \cos C = 0, & (AA_1) \\ \beta' \cos B + \gamma' \cos C - \alpha' \cos A = 0. & (B_1 C_1) \end{cases}$$

$$\text{Pour le point } B_2 \begin{cases} \gamma'' \cos C - \alpha'' \cos A = 0, & (BB_1) \\ \alpha'' \cos A + \gamma'' \cos C - \beta'' \cos B = 0, & (A_1 C_1) \end{cases}$$

Tirant de là les valeurs des rapports $\frac{\beta'}{\gamma'}$, $\frac{\alpha'}{\gamma'}$, $\frac{\alpha''}{\gamma''}$, $\frac{\beta''}{\gamma''}$, et substituant dans (5), on trouve pour l'équation de $A_2 B_2$

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - 3 \gamma \cos C = 0. \quad (A_2 B_2)$$

de même les équations $B_2 C_2$ et $A_2 C_2$,

$$\beta \cos B + \gamma \cos C - 3 \alpha \cos A = 0, \quad (B_2 C_2)$$

$$\alpha \cos A + \gamma \cos C - 3 \beta \cos B = 0. \quad (A_2 C_2)$$

Cherchons la loi des coefficients.

Soit $m_2 = 3$, c'est le coefficient qu'on vient de trouver; cherchons l'équation de $A_3 B_3$, nous trouverons par le même procédé, en remplaçant 3 par m_2 , l'équation suivante :

$$+ \alpha \cos A + \beta \cos B - \frac{m_2 + 2}{m_2} \gamma \cos C = 0,$$

de même pour les autres lignes; ainsi

$$m_1 = 1, \quad m_2 = \frac{m_1 + 2}{m_1}, \quad m_3 = \frac{m_2 + 2}{m_2}.$$

Or, l'opération se faisant toujours de la même manière, on aura

$$m_n = \frac{m_{n-1} + 2}{m_{n-1}}.$$

(24)

On aura la suite

$$m_1 = 1,$$

$$m_2 = 3,$$

$$m_3 = \frac{5}{3},$$

$$m_4 = \frac{11}{5}.$$

Si on multiplie ces fractions par $\frac{3}{3}$, on aura les fractions suivantes :

$$\frac{3}{3} \cdot \frac{9}{3} \cdot \frac{15}{9} \cdot \frac{33}{15} \dots$$

On peut remarquer que tous les numérateurs sont de la forme

$$2^k + 1,$$

ainsi ou pour

$$m_4 = \frac{33}{15} = \frac{32 + 1}{16 - 1} = \frac{2^5 + 1}{2^4 - 1},$$

et en général pour l'indice $2p$, on aura

$$m_{2p} = \frac{2^{2p+1} + 1}{2^{2p} - 1},$$

et pour

$$m_{2p+1} = \frac{m_{2p} + 2}{m_{2p}} = \frac{2^{2p+2} - 1}{2^{2p+1} + 1}.$$

Si on fait $p = \infty$ on aura

$$\frac{2 - \frac{1}{2^{2p+1}}}{1 + \frac{1}{2^{2p+1}}},$$

et

$$m_{\infty} = 2.$$

ainsi

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - \gamma \cos C = 0. \quad (A_{\infty} B_{\infty})$$

Cette ligne passe par le point des rencontres de trois hauteurs; car si on retranche son équation de celle de AA_1 , il vient

$$\alpha \cos A - \gamma \cos C = 0, \quad \text{équation de } BB_1,$$

de même pour les droites $A_\infty C_\infty$, $B_\infty C_\infty$.

Les équations $A_n B_n$ et $A_n C_n$ sont les suivantes :

$$\alpha \cos A + \beta \cos B - m_n \gamma \cos C = 0, \quad (A_n B_n)$$

$$\alpha \cos A + \gamma \cos C - m_n \beta \cos B = 0, \quad (A_n C_n)$$

et la soustraction donne

$$B \cos \beta - \gamma \cos C = 0, \quad (AA_1)$$

$$\beta \cos B + \gamma \cos C - m_{n-1} \alpha \cos A = 0, \quad (B_{n-1} C_{n-1}).$$

On voit que le rapport *anharmonique* de ces quatre droites $A_n B_n$, $A_n C_n$, $B_{n-1} C_{n-1}$, AA_1 est égal à -1 ; donc elles forment un faisceau *harmonique*; ainsi le faisceau $A_1 B$, $A_1 C_1$, $A_1 A$, $A_1 B_1$ est harmonique, mais l'angle $AA_1 B$ est droit, donc AA_1 est la bissectrice de l'angle $C_1 A_1 B_1$; cette propriété n'a lieu que pour ce *seul* faisceau, comme l'a très-bien remarqué M. de Jonquières (t. XVI. p. 409).