

ÉMIL MATHIEU

FAURE

GROLOUS

TARDY

Solutions des questions 410 et 411 (Prouhet)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17
(1858), p. 187-190

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__187_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DES QUESTIONS 410 ET 411 (PROUHET)

(voir t. XVI, p. 403);

PAR MM. EMILE MATHIEU, LE CAPITAINE FAURE,
GROLOUS ET TARDY (GÈNES).

Si l'on désigne par D le déterminant :

$$\begin{vmatrix}
 \cos n \alpha_0 & \cos (n-1) \alpha_0 & \cos (n-2) \alpha_0 \dots & \cos 0 \alpha_0 \\
 \cos n \alpha_1 & \cos (n-1) \alpha_1 & \cos (n-2) \alpha_1 \dots & \cos 0 \alpha_1 \\
 \cos n \alpha_2 & \cos (n-1) \alpha_2 & \cos (n-2) \alpha_2 \dots & \cos 0 \alpha_2 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \cos n \alpha_n & \cos (n-1) \alpha_n & \cos (n-2) \alpha_n \dots & \cos 0 \alpha_n
 \end{vmatrix}$$

et par D_1 le déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos^n \alpha_0 & \cos^{n-1} \alpha_0 & \cos^{n-2} \alpha_0 \dots & \cos^0 \alpha_0 \\ \cos^n \alpha_1 & \cos^{n-1} \alpha_1 & \cos^{n-2} \alpha_1 \dots & \cos^0 \alpha_1 \\ \cos^n \alpha_2 & \cos^{n-1} \alpha_2 & \cos^{n-2} \alpha_2 \dots & \cos^0 \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos^n \alpha_n & \cos^{n-1} \alpha_n & \cos^{n-2} \alpha_n \dots & \cos^0 \alpha_n \end{vmatrix}$$

on aura

$$D = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} D_1. \quad \text{6}$$

En second lieu, si l'on désigne par D_2 le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin(n+1)\alpha_0 & \sin n\alpha_0 \dots & \sin \alpha_0 \\ \sin(n+1)\alpha_1 & \sin n\alpha_1 \dots & \sin \alpha_1 \\ \sin(n+1)\alpha_2 & \sin n\alpha_2 \dots & \sin \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \sin(n+1)\alpha_n & \sin n\alpha_n \dots & \sin \alpha_n \end{vmatrix}$$

on aura

$$D_2 = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \sin \alpha_0 \sin \alpha_1 \dots \sin \alpha_n D_1$$

Commençons par rappeler la formule

$$(m) \quad \left\{ \begin{aligned} 2^{n-1} \cos^n \alpha_0 &= \cos n \alpha_0 + n \cos(n-2)\alpha_0 \\ &+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos(n-4)\alpha_0 + \dots \end{aligned} \right.$$

Ensuite aux éléments de la première colonne du déterminant D , ajoutons les éléments des colonnes de rang impair multipliés respectivement par les coefficients du second membre de l'équation (m); puis agissons d'une manière analogue pour les autres colonnes: il est clair que le déterminant D pourra s'écrire de la manière sui-

vante :

$$\begin{vmatrix} 2^{n-1} \cos^n \alpha_0 & 2^{n-2} \cos^{n-1} \alpha_0 & 2^{n-3} \cos^{n-2} \alpha_0 \dots & \cos^0 \alpha_0 \\ 2^{n-1} \cos^n \alpha_1 & 2^{n-2} \cos^{n-1} \alpha_1 & 2^{n-3} \cos^{n-2} \alpha_1 \dots & \cos^0 \alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2^{n-1} \cos^n \alpha_n & 2^{n-2} \cos^{n-1} \alpha_n & 2^{n-3} \cos^{n-2} \alpha_n \dots & \cos^0 \alpha_n \end{vmatrix}$$

Par conséquent nous aurons

$$D = 2^{(n-1)+(n-2)+\dots+2+1} D_1,$$

ou

$$D = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} D_1.$$

Pour démontrer la formule de la deuxième question , nous rappellerons la formule suivante :

$$\begin{aligned} \sin(n+1)\alpha_0 &= (n+1) \cos^n \alpha_0 \sin \alpha_0 \\ &\quad - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} \cos^{n-2} \alpha_0 \sin^3 \alpha_0 + \dots, \end{aligned}$$

qui se déduit immédiatement de celle de Moivre. Si nous remplaçons $\sin^2 \alpha$, $\sin^4 \alpha$, etc., par $1 - \cos^2 \alpha$, $1 - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$, etc., cette formule pourra s'écrire

$$\sin(n+1)\alpha_0 = \sin \alpha_0 \left\{ \cos^n \alpha_0 \left[n+1 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5} + \dots \right] + A \cos^{n-2} \alpha_0 + B \cos^{n-4} \alpha_0 + \dots \right\}$$

ou

$$\sin(n+1)\alpha_0 = \sin \alpha_0 (2^n \cos^n \alpha_0 + A \cos^{n-2} \alpha_0 + B \cos^{n-4} \alpha_0 + \dots).$$

Remplaçons dans le déterminant D_1 les sinus qui y entrent en fonction de $\cos \alpha_0$, et faisons sortir en dehors du déterminant les facteurs $\sin \alpha_0$, $\sin \alpha_1$ etc., communs respectivement aux éléments de la première ligne, de la

deuxième, etc., D_2 deviendra

$$\times \begin{array}{c} \sin \alpha_0 \sin \alpha_1 \quad \sin \alpha_n \\ \left| \begin{array}{ccc} 2^n \cos^n \alpha_0 + A \cos^{n-2} \alpha_0 + B \cos^{n-4} + & 2^{n-1} \cos^{n-1} \alpha_0 + A' \cos^{n-2} \alpha_0 + & \cos^0 \alpha_0 \\ 2^n \cos^n \alpha_1 + A \cos^{n-2} \alpha_1 + B \cos^{n-4} + & 2^{n-1} \cos^{n-1} \alpha_1 + A' \cos^{n-2} \alpha_1 + & \cos^0 \alpha_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 2^n \cos^n \alpha_n + A \cos^{n-2} \alpha_n + B \cos^{n-4} + & 2^{n-1} \cos^{n-1} \alpha_n + A' \cos^{n-2} \alpha_n + & \cos^0 \alpha_n \end{array} \right| \end{array}$$

Or, d'après un principe duquel nous nous sommes déjà servis, nous pourrions supprimer les derniers termes de ces éléments, puis les avant-derniers, et ainsi de suite, de manière que chaque élément ne contienne plus que son premier terme.

Faisons ensuite sortir les puissances de 2 en dehors du déterminant, nous aurons enfin

$$D_2 = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin \alpha_0 \sin \alpha_1 \quad \sin \alpha_n D_1$$
