

BERGIS

Solution analytique de la question 413

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17
(1858), p. 180-182

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__180_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 413

(voir p. 179);

PAR M. BERGIS,

Élève du lycée Charlemagne (institution Massin).

Soit l'équation de la conique

$$\rho = \frac{P}{1 - e \cos \alpha},$$

et

$$\rho = \frac{-P}{e \cos \alpha}.$$

celle de la directrice correspondante au foyer pris pour pôle.

Soient r', α' les coordonnées du point A_1 ; r'', α'' celles de A_2 ; ρ', ω' celles du point variable M.

D'après une formule connue, l'équation de MA_1 sera

$$\rho = \frac{\rho' r' \sin(\omega' - \alpha')}{r' \sin(\omega - \alpha') - \rho' \sin(\omega - \omega')}$$

ou

$$\rho = \frac{\rho' r' \sin(\omega' - \alpha')}{(r' \cos \alpha' - \rho' \cos \omega') \sin \alpha + (\rho' \sin \omega' - r' \sin \alpha') \cos \alpha}.$$

La coordonnée angulaire du point d'intersection P de

cette droite avec la directrice sera donnée par la formule

$$\operatorname{tang} \omega_1 = - \frac{e \rho' r' \sin(\omega' - \alpha') + (\rho' \sin \omega' - r' \sin \alpha') \rho}{(r' \cos \alpha' - \rho' \cos \omega') \rho},$$

ou bien, en exprimant que les points A_1 , A_2 , M sont sur la conique, on a, réductions faites,

$$\operatorname{tang} \omega_1 = \frac{\sin \alpha' - \sin \omega'}{\cos \alpha' - \cos \omega'}$$

ou

$$\operatorname{tang} \omega_1 = - \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha' + \omega')}.$$

De même MA_2 coupera D en un point Q dont la coordonnée angulaire sera donnée par

$$\operatorname{tang} \omega_2 = - \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha'' + \omega'')}.$$

L'angle sous lequel la distance PQ est vue du foyer F est la différence des angles ω_1 et ω_2 . La tangente de cet angle sera donc donnée par

$$\frac{\frac{1}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha'' + \omega'')} - \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha' + \omega')}}{1 + \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha'' + \omega'') \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha' + \omega')}}.$$

ou

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha'')}{\sin \frac{1}{2}(\alpha' + \omega') \sin \frac{1}{2}(\alpha'' + \omega'') + \cos \frac{1}{2}(\alpha' + \omega') \cos \frac{1}{2}(\alpha'' + \omega'')},$$

ou enfin

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha' - \omega''),$$

quantité constante.

Le théorème est donc démontré.

Note du Rédacteur. M. Richard Oxamendi considère les polaires des points P et Q, elles passent par F et sont respectivement perpendiculaires à PF et QF ; les droites PF, la perpendiculaire à PF en F, les droites FA, FM forment un faisceau harmonique : un angle étant droit dans ce faisceau, l'autre est bissecté, etc.