

ANGELO GENOCCHI

Extraction abrégée d'une racine cubique

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17
(1858), p. 136-139

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__136_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXTRACTION ABREGÉE D'UNE RACINE CUBIQUE ;

PAR M. ANGELO GENOCCHI,

J'ai eu tout récemment l'occasion de m'occuper de l'extraction abrégée des racines cubiques dans un cours d'algèbre et de géométrie que je suis chargé de faire à l'université de Turin. M. Serret, dans son *Traité d'Arithmétique* (publié en 1852) exige qu'on ait déjà trouvé $n + 2$ chiffres de la racine pour en déterminer n par une simple division. On trouve la même proposition dans une traduction italienne de l'*Arithmétique* de M. Bertrand, imprimée à Florence en 1856 avec des additions et des

notes du traducteur. M. Amiot, dans un intéressant article (*Nouvelles Annales*, 1851, p. 254 et 257) semble même exiger qu'on connaisse au moins $n + 3$ chiffres. Je me suis rangé à l'opinion de MM. Midy et Finck, qui se contentent de $n + 1$ chiffres seulement (*Nouvelles Annales*, 1844, p. 239; 1846, p. 251); mais j'ai précisé avec plus de soin le cas où le quotient de la division n'est plus la valeur approchée à moins d'une unité de la partie restante de la racine.

Je rapporte mon calcul qui est assez simple.

Soient N le nombre dont on cherche la racine cubique; a le nombre formé par les $n + 1$ chiffres déjà trouvés à la racine, suivis de n zéros; q le quotient et r le reste de la division de $N - a^3$ par $3a^2$.

En posant

$$\sqrt[3]{N} = A + x,$$

on a

$$\frac{N - a^3}{3a^2} = x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} = q + \frac{r}{3a^2},$$

d'où

$$x = q + \frac{r}{3a^2} - \left(\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} \right).$$

Comme $r < 3a^2$, on voit que la différence entre x et q sera toujours < 1 tant qu'on aura

$$\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} < 1,$$

et que si cette inégalité n'a pas lieu, x sera $< q$. D'ailleurs on a $x < 10^n$ puisque la partie entière de x ne doit contenir que n chiffres. Or si x n'excède pas $10^n - \frac{1}{2}$, on

peut affirmer que l'on aura

$$\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} < 1,$$

car $3x$ n'excédera pas

$$3 \cdot 10^n - \frac{3}{2} < 3 \cdot 10^n - 1,$$

et, à cause de

$$a \geq 10^{2n}, \quad x < 10^n,$$

on aura

$$\frac{3x}{a} + \frac{x^2}{a^2} < \frac{3 \cdot 10^n - 1}{10^{2n}} + \frac{1}{10^{2n}},$$

d'où

$$\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} < \frac{x}{10^n} < 1.$$

Mais si q ne surpasse pas 10^n lorsque x excédera $10^n - \frac{1}{2}$, la différence $q - x$ sera toujours < 1 . Il faut donc qu'on ait

$$q > 10^n.$$

Or le reste $\frac{N - a^3}{10^{3n}}$ ne peut surpasser $3 \left(\frac{a}{10^n} \right)^2 + 3 \left(\frac{a}{10^n} \right)$, et, par conséquent, la fraction $\frac{N - a^2}{3a^2}$ ne peut pas surpasser $10^n + \frac{10^{2n}}{a}$; d'où il s'ensuit que q sera toujours $< 10^n + 1$, excepté dans le cas de $a = 10^{2n}$. Dans ce cas

$$q = 10^n + 1, \quad r = 0,$$

$$N = 10^{3n} \cdot [(10^n + 1)^3 - 1].$$

Voici le cas *unique* où q étant $= 10^n + 1$, $x > 10^n - \frac{1}{2}$,

on aura

$$q - x > 1,$$

et, par suite, $a + q$ ne sera plus une valeur approchée de $\sqrt[n]{N}$ à moins d'une unité. Mais, dans ce cas, x étant compris entre $10^n - \frac{1}{2}$ et 10^n , $a + q - 1$ sera la racine approchée à moins d'une demi-unité par excès, et $a + q - 2$ la racine approchée à moins d'une unité par défaut. Ainsi la racine approchée se déduit toujours du quotient q ; elle résulte donc toujours d'une simple division.

Au reste le cas singulier de $q - x > 1$ est assez reconnaissable soit par la forme de N , soit parce qu'alors q surpasse le plus petit nombre entier de $n + 1$ chiffres, tandis qu'on n'a besoin que de n chiffres.

Je crois donc qu'on peut prononcer sans exception que $n + 1$ chiffres de la racine suffisent pour déterminer les suivants par une simple division.

Note du Rédacteur. M. Housel m'écrit que la méthode abrégée donnée à la page 7 est déjà exposée dans les *Calculs pratiques* qu'il a publiés avec M. Babinet, et il ne met pas en doute que M. Forestier n'y soit parvenu de son côté.
