

PROUHET

**Note sur l'aire du triangle sphérique,
formule de Lhuilier**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 91-93

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__91_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR L'AIRe DU TRIANGLE SPHÉRIQUE,

Formule de Lhuilier ;

PAR M. PROUHET.

1. Si l'on représente par $2S$ la surface d'un triangle sphérique, on pourra mettre les deux formules de Delambre

$$\frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}, \quad \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

sous la forme suivante :

$$(1) \quad \frac{\sin\left(\frac{C}{2} - S\right)}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}},$$

$$(2) \quad \frac{\cos\left(\frac{C}{2} - S\right)}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}.$$

2. On déduit de l'équation (1)

$$\frac{\sin \frac{C}{2} - \sin\left(\frac{C}{2} - S\right)}{\sin \frac{C}{2} + \sin\left(\frac{C}{2} - S\right)} = \frac{\cos \frac{c}{2} - \cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2} + \cos \frac{a+b}{2}},$$

ce qui, en changeant les sommes ou différences en produits, devient

$$(3) \quad \frac{\operatorname{tang} \frac{S}{2}}{\operatorname{tang} \frac{C-S}{2}} = \operatorname{tang} p \operatorname{tang} \frac{p-c}{2}.$$

Par une transformation analogue, on déduit de l'équation (2) la suivante :

$$(4) \quad \operatorname{tang} \frac{S}{2} \operatorname{tang} \frac{C-S}{2} = \operatorname{tang} \frac{p-a}{2} \operatorname{tang} \frac{p-b}{2}.$$

Multipliant les équations (3) et (4) membre à membre et extrayant la racine carrée du résultat, on obtient

$$(5) \quad \operatorname{tang} \frac{S}{2} = \sqrt{\operatorname{tang} \frac{p}{2} \operatorname{tang} \frac{p-a}{2} \operatorname{tang} \frac{p-b}{2} \operatorname{tang} \frac{p-c}{2}},$$

formule de Simon Lhuilier.

3. On peut encore écrire les équations (1) et (2) sous cette forme ,

$$(6) \quad \sin \frac{C}{2} \cos S - \cos \frac{C}{2} \sin S = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{C}{2}} \sin \frac{C}{2},$$

$$(7) \quad \cos \frac{C}{2} \sin S + \sin \frac{C}{2} \cos S = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{C}{2}} \cos \frac{C}{2}.$$

En résolvant ces deux équations par rapport à $\cos S$ et à $\sin S$, on aura , après quelques transformations faciles ,

$$(8) \quad \cos S = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}},$$

$$(9) \quad \sin S = \frac{\sqrt{\sin p \sin (p-a) \sin (p-b) \sin (p-c)}}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}.$$

4. Si l'on désigne par 2σ la surface du triangle supplémentaire et par $2S'$, $2S''$, $2S'''$ les aires des triangles formés d'un côté du triangle proposé et des prolongements des deux autres , on aura

$$(10) \quad \tan \frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{\tan \frac{S'}{2} \tan \frac{S''}{2} \tan \frac{S'''}{2}}{\tan \frac{S}{2}}}.$$