

DELAIRE

Sur un théorème de géométrie sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 53-58

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__53_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN THÉOREME DE GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE

(voir t. XIV, p. 401),

PAR M. DELAIRE,

Élève de l'école préparatoire des Carmes (classe de M. Gerono).

Sur le diamètre d'un grand cercle d'une sphère comme axe, on décrit une lemniscate, on fait une projection stéréographique de cette courbe sur la sphère; cette projection renferme une partie de l'hémisphère. L'aire de la partie restante de l'hémisphère est égale au carré du diamètre de la sphère. (H. D'ARREST.)

Imaginons la sphère de rayon a dont le centre est à

l'origine, et supposons que l'on ait tracé une lemniscate dans le plan des xy en prenant pour ligne focale le diamètre dirigé suivant l'axe des x . Cette courbe sera représentée par

$$(1) \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2),$$

$$(2) \quad z = 0.$$

Pour obtenir la projection stéréographique de cette courbe sur la sphère, il faut imaginer un cône dont le sommet serait le pôle du grand cercle sur lequel on a tracé la lemniscate et dont la directrice serait cette courbe elle-même.

La génératrice de ce cône dont le sommet est le point $z = -a$, $x = 0$, $y = 0$, aura des équations de la forme

$$(3) \quad x = my,$$

$$(4) \quad (z + a) = ny.$$

Éliminant x, y, z entre les quatre équations précédentes, nous obtenons la relation qui doit exister entre m et n pour que la génératrice s'appuie sur la directrice.

On a ainsi

$$(5) \quad (m^2 + 1)^2 = (m^2 - 1) m^2 n^2.$$

Si maintenant nous éliminons entre les équations (3), (4), (5) les quantités m et n qui seules particularisent la génératrice, la relation

$$(6) \quad (x^2 + y^2)^2 = (z + a)^2 (x^2 - y^2),$$

à laquelle nous parvenons, sera l'équation du cône. D'ailleurs la sphère est représentée par

$$(7) \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

L'ensemble de ces deux équations (6), (7) représente donc la projection stéréographique de la lemniscate donnée.

Cherchons maintenant la projection de l'intersection des deux surfaces sur le plan des zy . Il faut alors éliminer x entre les équations (6) et (7), ce qui conduit à

$$2(z+a)^2(-z^2+az-y^2)=0,$$

c'est-à-dire, d'une part, le point

$$z = -a, \quad x = 0, \quad y = 0$$

qui est le sommet, et, d'autre part, le cercle

$$z^2 + y^2 - az = 0.$$

Il faut maintenant chercher l'aire de la partie restante de l'hémisphère lorsqu'on enlève la portion qui est intérieure à la courbe d'intersection des deux surfaces. Considérons seulement la portion de sphère située dans l'angle des coordonnées positives. La projection sur le plan zoy de l'aire cherchée est la surface du quart de grand cercle moins le demi-cercle de rayon $\frac{a}{2}$.

Pour simplifier les calculs, nous ferons usage des coordonnées polaires dans le plan des zoy en prenant l'origine pour pôle.

Le cercle de rayon $\frac{a}{2}$ est alors représenté par le système

$$x = 0, \quad r = a \cos \theta,$$

et on a de plus

$$r^2 = z^2 + y^2 = a^2 - x^2,$$

d'après l'équation de la sphère.

Considérons dans la projection sur le plan zoy de l'aire que nous cherchons un élément superficiel du second ordre $r dr d\theta$, où r représente la distance à l'origine. Cet

élément est la projection d'un élément de la surface sous un angle égal à celui que forme le plan des zy avec le plan tangent à la sphère au point déterminé par la position de l'élément considéré. Donc, en divisant l'élément $r dr d\theta$ par le cosinus de cet angle, nous aurons l'expression de l'élément même de la surface. Or ce cosinus est ici $\frac{x}{a}$

ou $\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a}$; il suffit donc de calculer

$$a \iint \frac{r dr d\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Si l'on attribue d'abord à θ une valeur constante, on aura alors un élément d'un secteur, et faisant la somme de pareils éléments depuis $r = a \cos \theta$ jusqu'à $r = a$, et intégrant de $\theta = 0$ à $\theta = \frac{\pi}{2}$, on aura l'aire totale. On a successivement dans ce double calcul

$$a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a \cos \theta}^a \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta,$$

et

$$a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = a^2.$$

Ainsi dans le quart de l'hémisphère l'aire cherchée est a^2 ; donc dans l'hémisphère entier elle sera $4a^2$ ou le carré du diamètre de la sphère.

C. Q. F. D.

L'analogie de ce problème avec celui de la voûte carrable de Viviani est évidente. Viviani traçait deux cercles sur les rayons OA , OA' comme diamètres, puis il considérait ces cercles comme bases de cylindres dont les géné-

atrices étaient parallèles à oz . Ces cylindres enlevaient à chaque hémisphère une portion de la surface sphérique; la partie restante était, comme ici, égale à $4a^2$. Les projections de l'intersection des cylindres et de la sphère sur les plans de coordonnées étaient les mêmes que les projections de la courbe que nous avons obtenue ici, mais elles se présentaient différemment. Ainsi sur le plan des zx on trouve dans la question que nous avons traitée la parabole

$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

et dans l'autre la même parabole dont le sommet a tourné de 90 degrés,

$$z^2 + ax - a^2 = 0.$$

Sur le plan des xy dans le problème de Viviani on trouve le cercle $r = a \cos \theta$ qui est la projection sur le plan zoy de la courbe que nous avons obtenue ici; et enfin cette même ligne se projette sur le plan des xy suivant la courbe qui est la projection de la fenêtre de Viviani sur le plan zoy . Cette courbe est représentée par l'équation

$$z^4 - a^2 r^2 + a^2 y^2 = 0.$$

Elle offre un nœud à l'origine et rappelle la lemniscate par sa forme générale. L'aire de cette projection est égale à $\frac{4}{3}a^2$, comme il est facile de s'en assurer d'après son équation.

Connaissant la solution du problème de Viviani, on pouvait vérifier immédiatement le théorème énoncé; car la projection stéréographique de la lemniscate est représentée par

$$(1) \quad x^2 + y^2 + r^2 = a^2,$$

$$(2) \quad (x^2 + y^2)^2 = (r + a)^2 (x^2 - y^2),$$

et la fenêtre de Viviani, en supposant les génératrices des cylindres parallèles à ox , est donnée par l'équation

$$(3) \quad r^2 + r^2 - az = 0$$

jointe à l'équation (1).

Or, en éliminant x entre les équations (1) et (2), on trouve précisément l'équation (3). Donc la projection stéréographique de la lemniscate n'est autre chose que la fenêtre de Viviani, puisque ces deux courbes se trouvent représentées par les mêmes équations. Mais nous avons préféré donner une solution directe du problème.