

BRIOSCHI

Solution de la question 294

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 459-461

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__459_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 294

(voir t. XIII, p. 305);

PAR M. BRIOSCHI,

Professeur à l'université de Pavie.

Soient $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, n points matériels d'égales masses; G_2 le centre de gravité de P_1 et P_2 ; G_3 le centre de gravité de P_3 et de la masse $P_1 + P_2$ posée en G_2 ; G_4 le centre de gravité de P_4 et de $P_1 + P_2 + P_3$ posées en G_3 , et ainsi de suite; de sorte que G_n est le centre de gravité de P_n et de P_{n-1} ; G_n est indépendant de la manière dont on prend les masses; désignons par $A_{(i)}$ la distance de G_{i-1} à P_i , la quantité

$$\frac{1}{2} (A_2)^2 + \frac{2}{3} (A_3)^2 + \frac{3}{4} (A_4)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n} \right) A_n^2$$

est constante, dans quelque ordre qu'on prenne les masses.

(STEINER.)

Observation. G_1 est la même chose que P_1 : ainsi A_2 est la distance de P_1 à P_2 .

Soient x_r, y_r, z_r les coordonnées rectangulaires du point P_r ; $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$ celles du point G_r . On a

$$\alpha_r = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x_i (*), \quad \beta_r = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r y_i, \quad \gamma_r = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r z_i,$$

(*) $\sum_{i=1}^r$ signifie qu'il faut donner à s toutes les valeurs de la suite

1, 2, 3, ..., r.

T M.

et

$$A_r^2 = (\alpha_{r-1} - x_r)^2 + (\beta_{r-1} - y_r)^2 + (\gamma_{r-1} - z_r)^2.$$

En substituant les valeurs ci-dessus, on aura

$$\begin{aligned} (r-1)^2 A_r^2 &= \left[\sum_s^{r-1} x_s - (r-1)x_r \right]^2 + \left[\sum_s^{r-1} y_s - (r-1)y_r \right]^2 \\ &\quad + \left[\sum_s^{r-1} z_s - (r-1)z_r \right]^2. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} &\left[\sum_s^{r-1} x_s - (r-1)x_r \right]^2 \\ &= (r-1) \sum_s^{r-1} (x_s - x_r)^2 - \frac{1}{2} \sum_i^{r-1} \sum_j^{r-1} (x_i - x_j)^2; \end{aligned}$$

par conséquent, si l'on suppose

$$\left[\sum_s^{r-1} x_s - (r-1)x_r \right]^2 = (r-1)^2 \delta_r^2,$$

on a

$$a_2 \delta_2^2 + a_3 \delta_3^2 + \dots + a_n \delta_n^2 = \sum_i^n \alpha_i \sum_j^{i-1} (x_i - x_j)^2$$

où

$$(1) \quad \alpha_i = \frac{1}{i-1} a_i - \frac{1}{i^2} a_{i+1} - \frac{1}{(i+1)^2} a_{i+2} - \dots - \frac{1}{(n-1)^2} a_n.$$

On en déduit tout de suite que

$$\alpha_2 A_2^2 + \alpha_3 A_3^2 + \dots + \alpha_n A_n^2 = \sum_i^n \alpha_i \sum_j^{i-1} \delta_{i,j}^2,$$

où $\delta_{i,j}$ est la distance entre les points P_i, P_j . Le premier membre de cette équation se réduira à une constante dans quelque ordre qu'on prenne les masses, en supposant

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n;$$

or l'équation (1) et ses analogues nous donnent

$$a_i = (i-1) a_i + \frac{i-1}{i} (\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} + \dots + \alpha_n);$$

par conséquent, si l'on fait

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = m,$$

on a

$$a_i = \frac{i-1}{i} mn$$

et

$$\frac{1}{2} A_2^2 + \frac{2}{3} A_3^2 + \frac{3}{4} A_4^2 + \dots + \frac{n-1}{n} A_n^2 = \frac{1}{2n} \sum_i^n \sum_j^n \delta_{i,j}^2.$$

Théorème. Il est impossible de trouver quatre carrés tels, que la somme de trois quelconques moins le quatrième fasse un carré. (EULER.)

Théorème. ABC, triangle sphérique; O, centre de la sphère; V_1 , volume du parallélipède qui a pour arêtes OA', OB', OC'; A', B', C' sont les milieux des côtés du triangle. S étant l'aire du triangle, on a $V = \sin \frac{1}{2} S$.

(CORNELIUS KEOGH.)