

BRETON DE CHAMP

**Sur les sections circulaires du tore et
des surfaces de révolution algébriques
d'ordre quelconque**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 40-46

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__40_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES SECTIONS CIRCULAIRES DU TORE
et des surfaces de révolution algébriques d'ordre quelconque ;

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

J'ai eu la curiosité de rechercher par l'analyse toutes les sections circulaires du tore. On sait que M. Yvon Villarceau en a trouvé pour ces surfaces qui ne sont ni des *parallèles*, ni des *méridiens*. J'ai reconnu que ces sections sont les seules de ce genre que l'on puisse trouver pour le tore, et que, parmi les surfaces algébriques de révolution

à équation *irréductible* d'un degré supérieur au quatrième, aucune n'admet des sections circulaires obliques à l'axe, ni même des sections planes dont l'ordre soit inférieur à la moitié du nombre qui marque le degré de l'équation de la surface. Cette proposition peut être démontrée assez simplement comme il suit.

Lorsqu'une surface de révolution admet une section circulaire qui n'est pas un parallèle, cette section, en tournant autour de l'axe, engendre nécessairement la surface elle-même. Soit donc une circonférence tournant autour d'un axe situé d'une manière quelconque par rapport à elle. Je prends pour axe des coordonnées l'axe de révolution et deux autres droites perpendiculaires entre elles situées dans le plan de la circonférence décrite par le centre du cercle mobile. Parmi toutes les positions de ce cercle, je choisis celle où la trace de son plan sur le plan des xy est parallèle à l'axe des y . Cela posé, j'appelle α , β l'abscisse et l'ordonnée du centre, ρ le rayon, et φ l'inclinaison du plan du cercle sur celui des xy . Ce cercle résultera évidemment de l'intersection de la sphère qui a pour équation

$$(1) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = \rho^2$$

avec le plan qui a d'autre part pour équation

$$(2) \quad z = (x - \alpha) \tan \varphi;$$

X étant le rayon d'un parallèle quelconque de la surface décrite, on aura

$$(3) \quad X^2 = x^2 + y^2.$$

Si donc on élimine x et y entre ces trois équations, la relation entre X et z que l'on obtiendra sera l'équation de la section méridienne de la surface.

A cet effet, je développe les deux carrés de l'équa-

tion (1), je remplace $x^2 + y^2$ par X^2 et x par $\alpha + \frac{z}{\tan \varphi}$ et il vient

$$y = \frac{1}{2\beta} \left[X^2 + z^2 - \frac{2\alpha z}{\tan \varphi} - \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2 \right],$$

et, par suite,

$$(4) \left(\alpha + \frac{z}{\tan \varphi} \right)^2 + \frac{1}{4\beta^2} \left[X^2 + z^2 - \frac{2\alpha z}{\tan \varphi} - \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2 \right]^2 - X^2 = 0.$$

Cette équation est du quatrième degré, et lorsqu'on y remplace X^2 par $x^2 + y^2$ pour avoir celle de la surface, son degré ne change pas, de sorte que la surface dont il s'agit est du quatrième ordre, de même que sa section méridienne. On voit par là que si une surface de révolution d'un ordre n supérieur au quatrième admettait une section circulaire qui ne fût pas un parallèle, le premier membre de son équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

supposée mise sous forme rationnelle et entière, serait divisible par un facteur tel que

$$\left(\alpha + \frac{z}{\tan \varphi} \right)^2 + \frac{1}{4\beta^2} \left[x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2\alpha z}{\tan \varphi} - \alpha^2 + \beta^2 - \rho^2 \right]^2 - (x^2 + y^2),$$

ce qui est la seconde partie de la proposition énoncée ci-dessus.

Plus généralement, si au lieu de l'équation (1) nous en considérons une de degré n ,

$$\varphi(x, y) = 0,$$

et que nous la combinions avec l'équation (2), nous aurons une courbe de degré n , laquelle tournant autour de l'axe des z engendrera une surface, et en éliminant x et y à l'aide de l'équation (3), on aura l'équation de la sec-

tion méridienne de cette surface. Or φ étant du degré n , la substitution de $\sqrt{X^2 - x^2}$ au lieu de y donnera une équation au plus du degré $2n$ après la disparition des radicaux. D'ailleurs le degré ne s'élèvera pas en faisant ensuite

$$x = \alpha + \frac{z}{\tan \varphi},$$

donc la section méridienne sera tout au plus de l'ordre $2n$. Et comme cette élimination n'introduit évidemment que des puissances paires de x , il en sera de même de l'ordre de la surface. Donc, *toute section faite dans une surface algébrique de révolution à équation irréductible par un plan oblique à l'axe est d'un ordre égal à la moitié au moins du degré de l'équation.*

Il ne nous reste plus qu'à examiner quelles sont les relations qui doivent exister entre les données α , β , ρ et φ pour que la surface décrite soit un tore, et par là nous connaissons *toutes* les sections circulaires que le tore admet. Développons l'équation (4), elle devient

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (X^2 + z^2)^2 - \frac{4\alpha}{\tan \varphi} (X^2 + z^2)z - 2(\alpha^2 + \rho^2) X^2 \\ + \left[\frac{4(\alpha^2 + \beta^2)}{\tan^2 \varphi} - 2(\alpha^2 - \beta^2 + \rho^2) \right] z^2 \\ + \frac{4(\alpha^2 + \beta^2 + \rho^2)}{\tan \varphi} z + (\alpha^2 - \beta^2 + \rho^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2 = 0, \end{array} \right.$$

et son premier membre, si la surface est un tore, doit être divisible par un facteur de la forme

$$(X - R)^2 + (z - c)^2 - r^2,$$

car en égalant ce facteur à zéro, on a une circonférence de cercle. Mais il doit être divisible en même temps par

le facteur

$$(\mathbf{X} + \mathbf{R})^2 + (z - c)^2 - r^2,$$

lequel égalé à zéro donne la position symétrique du méridien circulaire par rapport à l'axe des z . Or le produit de ces deux facteurs est

$$(\mathbf{X}^2 + z^2 - 2cz + \mathbf{R}^2 + c^2 - r^2)^2 - 4\mathbf{R}^2 \mathbf{X}^2,$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned} & (\mathbf{X}^2 + z^2)^2 - 4c(\mathbf{X}^2 + z^2)z + [2(\mathbf{R}^2 + c^2 - r^2) - 4\mathbf{R}^2] \mathbf{X}^2 \\ & + [2(\mathbf{R}^2 + c^2 - r^2) + 4c^2] z^2 \\ & - 4c(\mathbf{R}^2 + c^2 - r^2)z + (\mathbf{R}^2 + c^2 - r^2)^2. \end{aligned}$$

Ce polynôme devant être identique avec le premier membre de l'équation (5), on a entre les coefficients les relations

$$(6) \left\{ \begin{aligned} c &= \frac{a}{\tan \varphi}, \\ (\mathbf{R}^2 + c^2 - r^2 - 2\mathbf{R}^2) &= -(\alpha^2 + \beta^2 + \rho^2), \\ (\mathbf{R}^2 + c^2 - r^2) + 2c^2 &= -(\alpha^2 - \beta^2 + \rho^2) + \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{\tan^2 \varphi}, \\ c(\mathbf{R}^2 + c^2 - r^2) &= -\frac{a}{\tan \varphi} \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \rho^2) \\ (\mathbf{R}^2 + c^2 - r^2)^2 &= (\alpha^2 - \beta^2 + \rho^2)^2 + 4\alpha^2 \beta^2. \end{aligned} \right.$$

C'est en éliminant $\mathbf{R}$, c , r entre ces cinq équations que nous découvrirons les conditions auxquelles il faut satisfaire pour que la surface décrite soit un tore. J'ai laissé à dessein le trinôme $\mathbf{R}^2 + c^2 - r^2$ en évidence, parce que l'élimination est rendue par là plus facile.

En combinant la première de ces équations avec la

troisième et la quatrième, on trouve d'abord

$$R^2 + c^2 - r^2 = \frac{2\beta^2}{\tan^2 \varphi} - (\alpha^2 - \beta^2 + \rho^2),$$

$$\frac{\alpha}{\tan \varphi} (R^2 + c^2 - r^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \rho^2) = 0;$$

puis, en chassant $R^2 + c^2 - r^2$,

$$(7) \quad \frac{\alpha\beta^2}{\tan^2 \varphi} \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \varphi} \right) = 0.$$

Portant ensuite la valeur ci-dessus de $R^2 + c^2 - r^2$ dans la cinquième équation, il vient

$$(8) \quad \beta^2 \left[\frac{\beta^2}{\tan^4 \varphi} - \frac{\alpha^2 - \beta^2 + \rho^2}{\tan^2 \varphi} - \alpha^2 \right] = 0.$$

En employant la seconde des équations (6), on n'obtiendrait aucune nouvelle condition, de sorte que les équations (7) et (8) renferment toutes les solutions du problème.

On peut vérifier la relation (7) de trois manières : 1° en faisant $\frac{1}{\tan \varphi} = 0$; 2° en faisant $\beta = 0$; 3° en faisant $\alpha = 0$.

Dans le premier cas, si β n'est pas nul, la relation (8) donne $\alpha = 0$. Le cercle décrivant est alors dans le plan des yz et se confond avec une section méridienne.

Dans le second cas, celui où l'on fait $\beta = 0$, il est facile de voir que la surface décrite est une sphère, quelle que soit la valeur de φ , et que conséquemment elle ne peut être un tore.

Reste donc le troisième cas, celui où l'on fait $\alpha = 0$, β et $\frac{1}{\tan \varphi}$ n'étant pas nuls. La relation (8) donne alors

$$\beta^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi,$$

d'où

$$R^2 = \rho^2, \quad c = 0, \quad r^2 = R^2 \sin^2 \varphi.$$

Cette solution donne précisément le système de sections circulaires découvert par M. Yvon Villarceau, et on voit en même temps que le tore n'en admet pas d'autres.
