

LEBESGUE

Sur un théorème des nombres

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 403-407

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__403_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN THÉORÈME DES NOMBRES ;

PAR M. LEBESGUE.

LEGENBRE, *Théorie des Nombres*, t. II, p. 144

PROBLÈME. Dans un carré divisé en seize cases suivant la figure ci-jointe, inscrire seize nombres $A, B, C, \dots, Q$, qui satisfassent aux conditions suivantes :

A	B	C	D
E	F	G	H
I	K	L	M
N	O	P	Q

1°. Que la somme des carrés des nombres soit égale dans chacune des quatre lignes horizontales, égale aussi dans chacune des quatre lignes verticales et dans les deux diagonales, ce qui fait dix conditions;

2°. Que la somme des produits deux à deux, tels que AE, BF, CG, DH , soit nulle à l'égard des deux premières horizontales, comme à l'égard de deux horizontales quelconques, et qu'il en soit de même à l'égard de deux lignes verticales, ce qui fait douze conditions.

On aurait donc en tout vingt-deux conditions à remplir et seize inconnues seulement. Cependant Euler remarque qu'il y a une infinité de manières de satisfaire à ce problème et qu'il en possède la solution générale, et il en a donné pour exemple le carré suivant :

$$\begin{array}{cccc}
 68. & -29, & 41, & -37, \\
 -17, & 31, & 79. & 32, \\
 59, & 25, & -23, & 61, \\
 -11, & 7 & 8, & 49.
 \end{array}$$

L'analyse de ce problème n'a pas été publiée et il est

fort à désirer qu'elle le soit, si on peut la trouver dans les manuscrits de l'auteur non encore imprimés, car on voit qu'il serait fort difficile de la restituer.

Note de Legendre. Ce problème se trouve dans la correspondance d'Euler avec Lagrange. (Voir les manuscrits de Lagrange déposés à la bibliothèque de l'Institut.)

Dans le tome I^{er} des *Comm. arith Collectæ*, p. 427, se trouve un Mémoire intitulé : *Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile* (N. com. XV, 1770, p. 75, exhibuit 1775, Mart. 5).

Ce Mémoire renferme 16 pages in-folio. Voici la fin du Mémoire.

(404)

Solution du problème énoncé plus haut.

« Il y a ici vingt-deux conditions auxquelles il faut satisfaire. Laissant de côté celles qui concernent les diagonales, toutes les autres sont remplies par la formule générale suivante :

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} + ap + bq + cr + ds \\ - aq + bp + cs - dr \\ + ar + bs - cp - dq \\ - as + br - cq + dp \end{array} \right| \begin{array}{l} + ar - bs - cp + dq \\ + as + br + cq + dp \\ - ap + bq - cr + ds \\ - aq - bp + cs + dr \end{array} \left| \begin{array}{l} - as - br + cq + dp \\ + ar - bs + cp - dq \\ + aq + bp + cs + dr \\ - ap + bq + cr - ds \end{array} \right| \begin{array}{l} + aq - bp + cs - dr \\ + ap + bq - cr - ds \\ + as - br - cq + dp \\ + ar + bs + cp + dq \end{array}$$

où la somme des carrés des nombres compris dans les colonnes, soit horizontales, soit verticales, est égale à

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) (p^2 + q^2 + r^2 + s^2).$$

Pour que ces sommes soient égales à la somme des carrés en diagonales, il faut joindre ces deux équations

$$\begin{aligned}
 &+ abpq + abrs + acpr + acqs \\
 &+ adps + adqr + bcqr + bcps \\
 &+ bdqs + bdpr + cdrs + cdpq = 0, \\
 &- abpq - abrs + acpr + acqs \\
 &- adps - adqr - bcqr - bcps \\
 &+ bdqs + bdpr - cdrs - cdpq = 0,
 \end{aligned}$$

d'où se tirent les deux suivantes :

$$\begin{aligned}
 (ac + bd)(pr + qs) &= 0, \\
 (ab + cd)(pq + rs) + (ad + bc)(ps + qr) &= 0.
 \end{aligned}$$

De là deux déterminations qui laissent encore six lettres arbitraires

$$(I) \quad pr + qs = 0,$$

$$(II) \quad \frac{a}{c} = \frac{-d(pq + rs) - b(ps + qr)}{b(pq + rs) + d(ps + qr)}.$$

» Développons un exemple en posant

$$p = 6, \quad q = 3, \quad r = 1, \quad s = -2.$$

Comme il vient

$$\frac{a}{c} = \frac{-16d + 9b}{16b - 9d},$$

soient

$$d = 0, \quad b = 1, \quad a = 9, \quad c = 16,$$

et le carré qui satisfait à toutes les conditions sera

+ 73	— 85	+ 65	— 11
— 53	+ 31	+ 107	+ 41
— 89	— 67	+ 1	— 67
— 29	— 65	— 35	+ 103

La somme des carrés en colonnes horizontales ou verticales est 16900, et si les nombres étoient divisés par 130, les sommes se réduiraient à l'unité.

» Pour ceux qui verraient avec peine la répétition des deux nombres 65 et 67, j'ajouterai un autre carré en nombres encore plus petits,

+ 68	— 29	+ 41	— 37
— 17	+ 31	+ 79	+ 32
+ 59	+ 28	— 23	+ 61
— 11	— 77	+ 8	+ 49

où la somme des quatre carrés est 8515.

» Noter que dans ces figures les quatre carrés des angles et les quatre carrés moyens produisent encore la même somme (*Com. coll.*, t. I^{er}, p. 441). »

A la page 450 du même volume, à propos d'une autre question d'analyse indéterminée, on lit ceci :

Non dubito fore plerosque, qui mirabuntur, me in hujusmodi quæstionibus evolvendis, quas nunc quidem summi geometræ aversari videntur, operam consumere ;

verum equidem fateri cogor, me ex hujusmodi investigationibus tantundem fere voluptatis capere, quam ex profundissimis geometricæ sublimioris speculationibus. Ac si plurimum studii et laboris impendi in quæstionibus gravioribus evolvendis, hujusmodi variatio argumenti, quandam mihi haud ingratam recreationem afferre solct. Cæterum analysis sublimior tantum debet methodo Diophantæ, ut nefas videatur eam penitus repudiare ().*
