

BRIOSCHI

Théorème sur une propriété des racines des équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 366-368

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__366_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME SUR UNE PROPRIÉTÉ DES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES.

PAR M. BRIOSCHI,

Professeur à l'université de Pavie (*).

Lemme. Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ les n racines supposées inégales de l'équation

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

En posant

$$\begin{aligned}\psi(x) &= (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_r), \\ \varphi(x) &= (x - x_{r+1})(x - x_{r+2}) \dots (x - x_n),\end{aligned}$$

on a

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\psi(x)}, \quad \varphi'(x) = \frac{f'(x)}{\psi(x)} - f(x) \frac{\psi'(x)}{\psi^2(x)};$$

de la dernière desquelles on déduit, vu que

$$\begin{aligned}f(x_{r+1}) &= 0, \dots, \\ \varphi'(x_{r+1}) \varphi'(x_{r+2}) \dots \varphi'(x_n) &= \frac{f'(x_{r+1}) f'(x_{r+2}) \dots f'(x_n)}{\psi(x_{r+1}) \psi(x_{r+2}) \dots \psi(x_n)}.\end{aligned}$$

Or on a évidemment

$$\begin{aligned}\psi'(x_1) \psi'(x_2) \dots \psi'(x_r) \psi(x_{r+1}) \psi(x_{r+2}) \dots \psi(x_n) \\ = (-1)^{r(n-r)} f'(x_1) f'(x_2) \dots f'(x_r);\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\varphi'(x_{r+1}) \varphi'(x_{r+2}) \dots \varphi'(x_n) \\ = (-1)^{r(n-r)} \frac{f'(x_{r+1}) f'(x_{r+2}) \dots f'(x_n)}{f'(x_1) f'(x_2) \dots f'(x_r)} \psi'(x_1) \psi'(x_2) \dots \psi'(x_r);\end{aligned}$$

(*) Nous engageons le lecteur à prendre un exemple particulier, par exemple $r = 2, n = 5$.

et parce que, en indiquant par D , Δ , ∇ les produits respectifs des carrés des différences des racines des équations

$$f(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0,$$

on a, comme on sait,

$$\begin{aligned} \pm D &= f'(x_1) f'(x_2) \dots f'(x_n), \\ \pm \Delta &= \varphi'(x_{r+1}) \varphi'(x_{r+2}) \dots \varphi'(x_n), \\ \pm \nabla &= \psi'(x_1) \psi'(x_2) \dots \psi'(x_r) \end{aligned}$$

(les quantités D , Δ , ∇ étant prises avec le signe positif lorsque les nombres n , $n-r$, r seront $\equiv 0$ ou $\equiv 1 \pmod{4}$, et avec le signe négatif dans les autres cas); on aura

$$(\pm \Delta) = (-1)^{r(n-r)} \frac{(\pm \nabla)}{f'^2(x_1) f'^2(x_2) \dots f'^2(x_r)} (\pm D).$$

Supposons

$$r = n - 2,$$

on aura

$$\pm \Delta = -(x_{n-1} - x_n)^2,$$

et les quantités D , ∇ devront être prises avec des signes contraires. Donc

$$(x_{n-1} - x_n)^2 = \frac{\nabla}{f'^2(x_1) f'^2(x_2) \dots f'^2(x_{n-2})} \cdot D;$$

mais

$$x_{n-1} + x_n = -(a_1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2}),$$

par conséquent

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} x_{n-1} &= -\frac{1}{2}(a_1 + x_1 + \dots + x_{n-2}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\nabla}}{f'(x_1) f'(x_2) \dots f'(x_{n-2})} \sqrt{D} \\ x_n &= -\frac{1}{2}(a_1 + x_1 + \dots + x_{n-2}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\nabla}}{f'(x_1) f'(x_2) \dots f'(x_{n-2})} \sqrt{D}. \end{aligned} \right.$$

Or D peut s'exprimer en fonction des coefficients de l'équation donnée, et $\frac{\sqrt{D}}{f'(x_1)f'(x_2)\dots f'(x_{n-2})}$ est une fonction rationnelle des racines $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$, vu que D est un carré ; on a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. Deux racines quelconques d'une équation algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré peuvent être exprimées en fonction rationnelle des autres $n - 2$.

Observation. Indiquant par

$$\theta(x_1, x_2, \dots, x_{n-2})$$

le second membre de la première des équations (1), on trouve facilement que cette fonction n'a que deux valeurs (Serret, *Algèbre supérieure*, p. 275). Ces deux valeurs sont celles des deux racines x_{n-1}, x_n .

Pour l'équation du troisième degré, en posant (*Alg. sup.*, p. 218)

$$x_2 = -\frac{1}{2}(a_1 + x_1) + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{D}}{f'(x_1)} = \theta(x_1),$$

on trouve

$$x_3 = \theta(x_2), \quad x_1 = \theta(x_3),$$

c'est-à-dire x étant une racine quelconque : les trois racines seront

$$x, \theta(x), \theta^2(x).$$

Pour l'équation du quatrième degré, en posant

$$-\frac{1}{2}(a_1 + x_r + x_s) + \frac{1}{2} \frac{x_r - x_s}{f'(x_r)f'(x_s)} \sqrt{D} = \theta(x_r, x_s),$$

on a

$$x_r = \theta(x_r, x_s) = \theta(x_s, x_u) = \theta(x_u, x_r).$$

De ces propriétés des racines, on déduit que ces équations sont résolubles algébriquement.

Note. Incessamment une démonstration fort simple de ce théorème par M. A. Genocchi.