

JOZON

E. GILLOTIN

Solution de la question 328

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 300-302

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__300_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 328

(voir p. 230);

PAR M. JOZON,Elève de Logique (Sciences), lycée Louis-le-Grand
(classe de M. Lecaplain),**ET M. E. GILLOTIN,**

Elève du collège Rollin (classe de M. Suchet) (*).

Connaissant la somme de deux nombres et le produit de la somme de leurs carrés par la somme de leurs cubes, trouver ces nombres.

Si x et y sont les deux nombres inconnus, m leur somme et p^5 le produit de la somme de leurs carrés par la somme de leurs cubes, il suffit, pour résoudre la question, de trouver les solutions des deux équations

$$(1) \quad x + y = m,$$

$$(2) \quad (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = p^5.$$

Pour cela, de l'équation (1) je tire

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= m^2 - 2xy, \\ x^3 + y^3 &= m^3 - 3xy(x + y) = m^3 - 3mxy. \end{aligned}$$

Remplaçant dans l'équation (2) $x^2 + y^2$ et $x^3 + y^3$ par leurs valeurs, on obtient l'équation

$$p^5 = m^5 + 6m x^2 y^2 - 5m^3 xy.$$

Si l'on prend xy pour inconnue, l'équation se trouve ramenée au second degré, et on tire pour xy la valeur

$$(3) \quad xy = \frac{5m^3 \pm \sqrt{m^6 + 24mp^5}}{12m}.$$

(*) M. Perret, professeur de physique au lycée de Périgueux, ramène la solution à la sommation des racines d'une équation du deuxième degré.

Je connais ainsi la somme et le produit des nombres x et y . Ces deux nombres sont donc les racines de l'équation

$$z^2 - mz + \frac{5m^3 \pm \sqrt{m^6 + 24mp^5}}{12m} = 0,$$

d'où

$$z = \frac{3m^2 \pm \sqrt{-6m^4 - m^4 \mp 3m\sqrt{m^6 + 24mp^5}}}{6m}.$$

Les quantités m et p étant positives, pour que les valeurs de z puissent être réelles, il faut prendre le second radical avec le signe $+$. Si alors je suppose que x soit le plus grand des deux nombres proposés, j'aurai

$$x = \frac{3m^2 + \sqrt{-6m^4 + (\sqrt{m^6 + 24mp^5})3m}}{6m}$$

et

$$y = \frac{3m^2 - \sqrt{-6m^4 + (\sqrt{m^6 + 24mp^5})3m}}{6m}.$$

Discussion des valeurs de x et de y ().*

Pour que les valeurs trouvées pour x et y conviennent, il faut et il suffit qu'elles soient réelles et positives.

Pour qu'elles soient réelles, il faut et il suffit que l'on ait

$$3m\sqrt{m^6 + 24mp^5} > 6m^4,$$

ou bien

$$9m^8 + 216m^3p^5 > 36m^8,$$

ou enfin

$$8p^5 > m^5.$$

(*) Cette discussion est de M. Jozon

Je suppose maintenant que m^5 soit toujours plus petit que $8p^5$. Dans ce cas, la valeur de x est réelle et positive, celle de y est réelle. Pour qu'elle soit positive, il faut et il suffit que l'on ait

$$3m^2 > \sqrt{-6m^4 + 3m\sqrt{m^6 + 24mp^5}},$$

ou

$$15m^4 > 3m\sqrt{m^6 + 24mp^5},$$

ou enfin

$$m^5 > p^5.$$

Ainsi donc, les valeurs trouvées pour x et y conviendront toujours, quand on aura à la fois

$$8p^5 > m^5 \quad \text{et} \quad p^5 < m^5,$$

et ne conviendront jamais quand l'une de ces conditions ne sera pas remplie.

Si l'on suppose p constant, la plus grande valeur qu'on puisse donner à m^5 est donc

$$m^5 = 8p^5$$

et alors la quantité sous le radical s'annulant, $x = y = \frac{m}{2}$, et la plus petite valeur qu'on puisse donner à m^5 est

$$m^5 = p^5$$

et, dans ce cas, $x = m$ et $y = 0$.